Mariana Osiac

Fizica Plasmei

Editura Universitaria Craiova

III 151.324

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBL. CENTR. UNIV.
„M. EMINESCU" IAŞI
III 151.324

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Mariana Osiac

Fizica Plasmei

CURS UNIVERSITAR

535056

452031
B.C.U. IASI

Editura UNIVERSITARIA
Craiova, 2008

ALE

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Referenți științifici:
Prof.univ.dr. Maria DINESCU
Prof.univ.dr. Marcela URSACHE

Copyright © 2008 Universitaria
Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universitaria

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

OSIAC, MARIANA
Fizica plasmei : curs universitar / Mariana Osiac. - Craiova : Universitaria, 2008
Bibliogr.
ISBN 978-606-510-207-1

533.9(0075.8)

Apărut: 2008
Tipografia Universității din Craiova
Str. Brestei, nr.156A, Craiova, Dolj, România
Tel.: +40 251 598054
Tipărit în România

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

28. SEP. 2009

Cuprins

1. Noțiuni fundamentale 2
1.1. Definiția plasmei..... 2
1.2. Cvasineutralitatea plasmei..... 4
1.3. Stratul de sarcină spațială. Noțiunea de prestrat..... 11
2. Procese fundamentale in plasma 15
2.1. Clasificarea ciocnirilor..... 15
2.2. Interacțiunea binară si legile de conservare. 17
2.3. Integralele caracteristice ale ciocnirilor. 24
3. Ecuațiile cinetice ale particulelor încărcate 30
3.1. Funcții de distribuție. 30
3.2. Ecuațiile cinetice..... 35
3.3. Termenul de ciocnire al ecuației cinetice..... 41
4. Plasmele de echilibru..... 48
4.1. Funcția de distribuție in plasmele de echilibru..... 48
4.2. Funcția de distribuție a particulelor încărcate în câmp electric..... 54
4.3. Metode de rezolvare a ecuației cinetice. 57
4.4. Efectul ciocnirilor elastice electron – atom asupra funcției de distribuție a electronilor în câmp electric. 63
5. Momentele ecuației Boltzmann..... 70
5.1. Ecuațiile momentelor funcției de distribuție. 70
5.2. Derivarea momentelor ecuațiilor. 75
5.2. Ecuațiile mișcării. 79
5.3. Ecuațiile energiei si fluxului de căldură..... 92
6. Fenomene de transport în plasmă în absența câmpului magnetic 101
6.1. Mișcarea particulelor încărcate și transportul energiei într-o plasmă slab ionizată..... 101
6.2. Difuzia ambipolară..... 111
6.3. Ecuația energiei particulelor încărcate într-o plasmă slab ionizată..... 119
Bibliografie 129

BCU IASI - UNIVERSITY LIBRARY

1. Noțiuni fundamentale

1.1. Definiția plasmei.

Plasma este considerată cea de-a patra stare de agregare a materiei. Aproape 99% din univers se găseşte în stare de plasma. Soarele, fulgerele, erupțiile (gazoase sau lichide) ale vulcanilor se găsesc în stare de plasmă. În tuburile sau în baloanele luminiscente de sticlă, folosite la iluminatul public, la reclamele luminoase, se află plasme (produse prin descărcări luminiscente în gaze). Jeturile incandescente ale motoarelor ce propulsează avioanele cu reacție sau ale rachetelor purtătoare de obiecte cosmice nu sunt altceva decât jeturi de plasmă.

Se defineşte plasma ca un sistem fizic cvasineutru din punct de vedere electric în componența căruia intră particule încărcate electric (electronii şi ionii odată ionizați sau de două ori), particule neutre (atomi, molecule aflați pe stările fundamentale şi excitate) componenta fotonică. Dezexcitarea atomilor, moleculelor din stările excitate duce la apariția fotonilor. Raportul dintre numărul de particule ionizate în unitatea de volum şi numărul total de particule din aceeaşi unitate de volum se numeşte grad de ionizare al plasmei şi este egal cu $\alpha = \frac{n_i}{n_n + n_i}$ şi diferă foarte mult de la o plasmă la alta. De obicei în plasmele de laborator, numite şi plasme reci el este foarte mic iar în plasmele fierbinți, puternic ionizate în care concentrația particulelor neutre este foarte mică fată de concentrația ionilor este aproape de unitate. Plasma complet ionizată

se caracterizează prin absenta în totalitate a particulelor neutre şi gradul ei de ionizare este egal cu unitatea.
Termenul de plasmă a fost introdus în 1928 de către Irving Langmuir care studia diferitele tipuri de descărcări electrice în gaze la presiuni joase. Denumirea de plasmă cuprinde o gamă largă de gaze electroconductoare, de la descărcările de joasă presiune, aflate la temperaturi de câteva sute grade Kelvin pană la plasmele complet ionizate aflate la temperaturi de zeci şi sute de milioane de grade. Termenul de plasmă nu presupune prezența ambelor tipuri de purtători (electroni si ioni), spre exemplu cazul plasmei ionilor din rețeaua cristalină a unui metal. Aceşti ioni împreună cu gazul electronilor liberi alcătuiesc un sistem neutru din punct de vedere electric. Nucleul incandescent al Pământului sau al Soarelui constituie plasme lichide. Astfel, încălzind un corp aflat în stare solidă pană la temperatura de topire, el trece în stare lichidă. Încălzindu-l mai departe pană la temperatura de fierbere, el trece în stare gazoasă. Dacă încălzim în continuare gazul rezultat pană la temperaturi destul de mari, încât prin ciocniri se pot produce excitări, ionizări şi disocieri spunem că gazul a trecut în cea de a patra stare de agregare, cea de plasmă [1-7].

Într-o plasmă pe lângă ciocnirile elastice dintre moleculele individuale au loc şi un număr mare de ciocniri neelastice, care conduc la formarea unor molecule (atomi) excitate în diferite stări cuantice, precum şi la ionizări şi disocieri ale moleculelor. Existenta ionilor şi electronilor conferă plasmei proprietatea de a putea interacționa cu câmpuri electrice şi magnetice exterioare. Între particule încărcate ale plasmei forțele de interacțiune sunt de tip coulombian, ceea ce face ca o particulă să interacționeze simultan cu un număr mare de particule din jurul ei. Pe lângă

interacțiunile dintre particulele neutre (dacă plasma nu este complet ionizată) sunt şi interacțiuni individuale cunoscute în fizica gazului obişnuit, neionizat, au loc şi interacțiuni colective. În plasmă în afară de interacțiunile de rază scurtă (short-range) (neutru-neutru, electron-neutru, ion-neutru) domină şi interacțiuni de rază lungă (long-range) adică cele de tip coulombian dintre purtătorii de sarcină (ion-electron, electron-electron). Astfel orbitele particulelor încărcate din plasmă nu vor fi rectilinii sau linii frânte ci linii curbe cu mers sinuos, ondulat. Nu orice gaz ionizat este întotdeauna plasmă, deoarece o colecție de particule ionizate (pozitive si negative) pot alcătui un sistem neutru din punct de vedere electric.

1.2. Cvasineutralitatea plasmei.

Pentru ca un gaz ionizat să fie neutru la scară macroscopică trebuie ca densitățile de sarcină pozitivă şi negativă să fie egale. Însa în gazele ionizate apar fluctuații care pot provoca separări locale şi aproape instantanee ale sarcinilor pozitive şi negative, violându-se astfel neutralitatea. Plasma nu poate fi riguros neutră pe distante sau volume oricât de mici de aceea se vorbeşte de cvasineutralitatea plasmei. Însă s-a constat că plasma are posibilitatea de a reface rapid neutralitatea acolo unde ea a fost întâmplător afectată. Pentru a înțelege acest fenomen evaluăm forțele locale care se împotrivesc separării sarcinilor de semn contrar şi care reuşesc într-un timp foarte scurt să refacă neutralitatea electrica.

Presupunem că într-o plasmă la un moment dat, într-o zonă mică se separă sarcinile pozitive de cele negative,

formându-se astfel un condensator plan, cu distanta x între zonele sale şi cu plăcile de arie S.

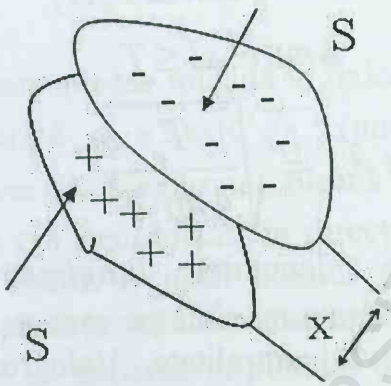

Figura 1.1.
Modelul separării complete a sarcinilor [1].

Daca n_e este concentraţia electronilor din plasmă, atunci ca urmare a separării totale cantitatea de sarcină de pe armatura negativă va fi dată de numărul total de electroni ce au fost în volumul $S \cdot x$ înainte de separare

$$Q = en_e Sx \qquad 1.1$$

Expresia câmpului electric din spaţiul acestui condensator plan este

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi n_e ex. \qquad 1.2$$

Distribuţia potenţialului electric φ este egală cu

$$\varphi \approx E \cdot l = 4\pi n_e exl, \qquad 1.3$$

unde l este grosimea stratului.

Abaterea de la condiţia de cvasineutralitate are loc atunci când se deplasează stratul de electroni şi când

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

înălțimea barierei de potențial este mai mică decât energia de agitație termică a electronilor,

$$eEl \le T_e, T_i$$

$$4\pi n_e e^2 xl \le T_e \qquad 1.4$$

$$l \equiv \lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_e e^2}} \qquad 1.5$$

unde λ_D este denumită ***lungimea Debye*** și caracterizează distanta maximă pe care au loc abateri de la condiția de cvasineutralitate. Valoarea numerică a lungimii Debye în sistemul *cgs* este $\lambda_D = 500\sqrt{\frac{T}{n}}$, unde λ_D este în centimetri, concentrația plasmei este în cm^{-3} și temperatura este măsurată în eV. Când temperaturile ionilor și electronilor diferă substanțial putem vorbi de lungimile Debye introduse de mărimile: $\lambda_{Di} = \sqrt{T_i}$ si $\lambda_{De} = \sqrt{T_e}$, astfel încât separarea sarcinii electrice este caracterizată de valoarea cea mai mică. Determinăm acum timpul cât durează separarea sarcinilor. Electronii din stratul de electroni acționează cu o forță de atracție asupra ionilor, forță egală cu $eE = 4\pi n_e e^2 x$. Ecuația mișcării pentru electroni are forma:

$$\frac{m_e d^2 x}{dt^2} = -4\pi n_e e^2 x \qquad 1.6$$

unde oscilațiile armonice sunt descrise de mărimea

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\omega_P = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} \,. \qquad 1.7$$

Cantitatea ω_P este adesea folosită în fizica plasmei şi are valoarea numerică $\omega_P = 5.6x10^4\sqrt{n_e}$ (unde ω_P este în sec^{-1} şi n_e în cm^{-3}). Electronul pleacă dintr-un punct oarecare (unde era neutralizat) în direcţia x iar câmpul întârzietor ce apare în jurul acestui punct va limita deplasarea lui până la valoarea maximă $x = \lambda_D$; după un timp electronul se întoarce în punctul din care a plecat refăcând astfel neutralitatea plasmei în acel loc. Electronul efectuează mai multe oscilaţii în zona respectivă dar de fiecare dată când trece prin punctul din care a plecat neutralitatea plasmei va fi refăcută. Aceste oscilaţii au fost puse în evidentă de către Langmuir şi de aceea se mai numesc şi oscilaţii Langmuir. Mediind pe mai multe perioade, plasma devine astfel neutră din punct de vedere electric. De aceea perioada cât durează separarea într-o plasmă este determinată de către:

$$\frac{1}{\omega_P} = \sqrt{\frac{m_e}{4\pi n_e e^2}} \,. \qquad 1.8$$

Fie acum un câmp electric creat de către o sferă încărcată introdusă în plasmă. Potenţialul electric φ din jurul sferei trebuie să satisfacă ecuaţia lui Poisson:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \,. \qquad 1.9$$

Dacă plasmă considerată aici conţine ioni simpli şi electroni densitatea de sarcină din spaţiu este determinată de diferenţa concentraţiilor lor, adică

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rho = e(n_e - n_i). \qquad 1.10$$

Dacă regiunea ecranată conține un număr mare de particule încărcate valoarea instantanee a concentrațiilor poate fi considerată egală cu valoarea medie a concentrației. Relația dintre valorile medii ale concentrațiilor şi potențialul electric este dată de ecuația Boltzmann:

$$n_i = ne^{-\frac{e\varphi}{T_i}}; \; n_e = ne^{\frac{e\varphi}{T_e}} \qquad 1.11$$

unde n este concentrația particulelor încărcate din regiunea neperturbată (unde plasma este neutră, $n_i = n_e = n$). Înlocuind relațiile de mai sus în ecuația Poisson se obține:

$$\Delta\varphi = -4\pi e \cdot n \cdot \left[e^{-\frac{e\varphi}{T_i}} - e^{\frac{e\varphi}{T_e}} \right]. \qquad 1.12$$

Pentru a găsi soluția ecuației 1.12, la distante suficient de mari de sfera încărcată ținem seama de condiția: $e\varphi << T_i, T_e$ şi dezvoltând în serie primii doi termeni obținem:

$$e^{-\frac{e\varphi}{T_i}} \approx \frac{1 - e\varphi}{T_i}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$e^{\frac{e\varphi}{T_e}} \approx \frac{1+e\varphi}{T_e} .$$

Înlocuind aceşti termeni în ecuaţia 1.12, aceasta se reduce la forma

$$\Delta\varphi - \frac{1}{\lambda_D^2}\varphi = 0 \qquad 1.13$$

unde

$$\lambda_D = \left[\frac{T_e T_i}{4\pi n e^2 (T_e + T_i)}\right]^{1/2} \qquad 1.14$$

este expresia generală pentru lungimea Debye care este proporţională cu raportul temperaturilor electronilor şi ionilor, T_e si T_i . Pentru $T_e >> T_i$ sau $T_i >> T_e$ aceste expresii schimbă ecuaţia 1.5. Soluţia ecuaţiei de mai sus care se anulează la infinit are forma:

$$\varphi = \frac{C}{r} e^{\frac{-r}{\lambda_D}} .$$

Pentru ca această soluţie să se găsească sub forma unui potenţial coulombian al unei sarcini q aflată la distante mici, când nu există ecranare putem scrie $C = q$. Atunci aceste expresii pentru potenţial pot fi scrise sub forma

$$\varphi = \frac{q}{r} e^{\frac{-r}{\lambda_D}} . \qquad 1.15$$

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

M. EMINESCU" IAŞI

Se poate vedea că pentru $r << \lambda_D$, potențialul coincide cu potențialul coulombian şi pentru $r >> \lambda_D$ potențialul este mult mai mic decât potențialul coulombian din cauza efectului de ecranare. Rezultatul de mai sus a fost obținut pentru un câmp din jurul unei sarcini sferice în condițiile în care energia potențială $e\varphi \approx qe/\lambda_D$ este mult mai mică decât energia termică a particulelor încărcate.

Cele discutate mai sus fac posibilă determinarea condițiilor de cvasineutralitate într-un caz mai strict. Interacțiunea sarcinilor spațiale ale electronilor şi ionilor mențin neutralitatea electrică în plasme, în volume care depăşesc lungimea Debye şi pentru perioade temporale mult mai mari decât inversul frecventei plasmei $t_D \approx 1/\omega_P$. Pentru ca condiția de plasmă să fie îndeplinită trebuie să aibă loc următoarea inegalitate:

$$L >> \lambda_D ; \tau >> t_D \qquad 1.16$$

unde L este dimensiunea caracteristică a plasmei şi τ este caracteristica temporală în care variază parametrii plasmei. De fapt aceste inegalităţi determină concentraţia particulelor încărcate a unui gaz ionizat care se numeşte plasmă. Pentru o plasmă în care sarcina negativă este dată de către electroni şi sarcina pozitivă este formată din ioni simpli, concentraţiile lor trebuie sa fie practic egale:

$$n_e \approx n_i >> \left| n_i - n_e \right| . \qquad 1.17$$

1.3. Stratul de sarcină spațială. Noțiunea de prestrat.

Ne propunem să dăm acum câteva detalii despre cum se formează stratul de sarcină spațială. Fie un perete al unei incinte la poziția $x=0$, plasma se va extinde la o distantă mare, la poziția $x>0$. La poziția $x=s$ ne imaginam un plan pe care-l denumim marginea stratului de sarcină spațială. În conformitatea cu discuția despre ecranarea Debye, presupunem că s este de ordinul lungimii Debye λ_D. În afara stratului $x \geq s$ condiția de cvasineutralitate ne cere să păstram concentrațiile particulelor încărcate ioni si electroni egale $n_i \approx n_e$.

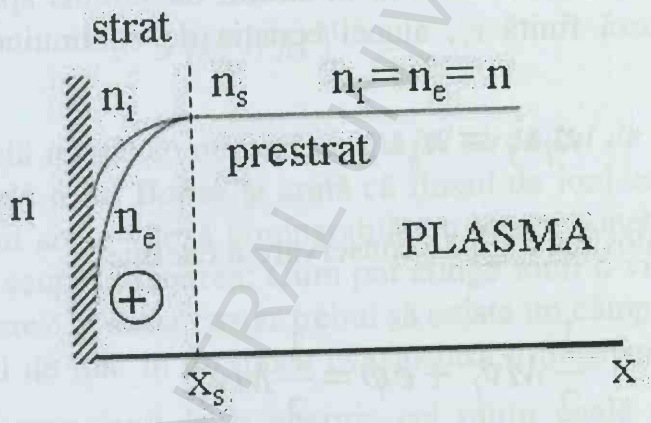

Figura 1.2.
Stratul de sarcină spațială [6].

În interiorul stratului de sarcină avem particule încărcate, electroni şi ioni ale căror concentrații nu sunt egale. Potențialul din stratul de sarcină spațială trebuie să fie negativ astfel încât să respingă electronii. Dacă ne rezumăm la problema unidimensională şi aplicăm legea Poisson, observăm că concentrația ionilor trebuie să fie

mare decât cea a electronilor. Dacă electronii au o distribuție Maxwelliană, concentrația lor în funcție de potențialul φ va fi:

$$n_e = n_s e^{\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right)} \qquad 1.18$$

unde n_s este concentrația electronilor la marginea stratului de sarcină spațială. Pentru a calcula concentrația ionilor considerăm că ionii curg către perete accelerați de câmpul electric din stratul de sarcină spațială, şi dacă ionii nu sunt reflectați de către perete se asigură un flux de ioni constant. Neglijând T_i şi presupunând că ionii intră în stratul de sarcină spațială cu o viteză finită v_s, atunci ecuația de continuitate se scrie:

$$n_i v_i = n_s v_s \qquad 1.19$$

şi prin folosirea legii de conservare a energiei

$$\frac{1}{2}Mv_i^2 + e\varphi = \frac{1}{2}Mv_s^2 \qquad 1.20$$

din cele două ecuații se obține rezultatul:

$$\frac{n_i}{n_s} = \frac{1}{\left[1 - 2e\varphi / Mv_s^2\right]^{1/2}} . \qquad 1.21$$

Condiția stratului de sarcină spațială $n_i > n_e$ trebuie să se mențină pentru valori mici ale potențialului $|\varphi|$, chiar în

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

interiorul stratului. În acest caz putem scrie ecuația de mai sus în felul următor, prin dezvoltare în serie Taylor:

$$\frac{n_e}{n_s}=1+\frac{e\varphi}{kT_e}+\dots \text{ si } \frac{n_i}{n_s}=1+\frac{e\varphi}{Mv_s^2}+\dots .$$

Deoarece φ este negativ, şi ținând cont de condiția $n_i > n_e$, obținem

$$\frac{e|\varphi|}{Mv_s^2}<\frac{e|\varphi|}{kT_e}. \qquad 1.22$$

Din relația de mai sus condiția stratului devine:

$$v_s > \left(kT_e/M\right)^{1/2}=c_s. \qquad 1.23$$

Această relație se numeşte ***criteriul stratului de sarcină spațială a lui Bohm*** şi arată că fluxul de ioni care intră în strat are o viteză comparabilă cu viteza sunetului. Se pune acum întrebarea: Cum pot atinge ionii o viteză aşa de mare? În acest caz ar trebui să existe un câmp electric destul de mic în regiunea cvasineutră a plasmei care să accelereze ionii la o energie cel puțin egală cu $\frac{1}{2}kT_e$ către marginea stratului de sarcină spațială. Un asemenea câmp electric E poate există numai în virtutea unor efecte cum ar fi: ciocnirile, ionizările, etc. Această regiune unde există un câmp electric foarte mic se numeşte ***prestrat***, şi se extinde pe distanțe de ordinul dimensiunilor plasmei. Câmpul electric foarte mic care există în prestrat păstrează încă cvasineutralitatea plasmei. Dacă între doi electrozi (pereți) se aplică o tensiune, există un strat de ioni pe fiecare perete, dar

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

căderile de potențial nu sunt egale, astfel că fluxurile la fiecare perete vor fi neegale deşi pereți pot avea aceeaşi arie. Fluxurile de ioni la perete sunt aceleaşi, $n_s v_s$ şi fluxul total de electroni trebuie să fie egal cu fluxul total de ioni.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. Procese fundamentale în plasmă

2.1. Clasificarea ciocnirilor.

Plasma este un ansamblu de particule încărcate (ioni pozitivi şi negativi, electroni), particule neutre (excitate sau nu) şi fotoni (radiaţie electromagnetica) toate fiind într-o mişcare şi permanentă interacţiune atât între ele cat şi cu câmpuri magnetice, electrice, gravitaţionale din exterior precum şi cu pereţii incintei. Ca urmare a numeroaselor interacţiuni plasma apare ca un sistem dinamic în care procesele de pierdere (distrugere) a particulelor sunt concurate de procesele de generare a lor. Prin procese de ionizare dispar atomii neutri şi apar ioni şi electroni, iar prin procesele de recombinare se formează atomi neutri (dispar ionii pozitivi şi electronii). De asemenea prin radiaţie plasma pierde fotoni dar această pierdere este concurată de formarea lor prin procese de dezexcitare radiativă a atomilor excitaţi.

Clasificarea generală are în vedere trei tipuri de interacţiuni:

1. *Procese elementare de volum.* Acestea sunt interacţiunile dintre particulele constituente ale plasmei, ciocniri elastice, excitări, ionizări, recombinări.
2. *Procese elementare superficiale*, adică interacţiuni între particulele constituente ale plasmei cu suprafeţele electrozilor, cu pereţii incintei; ionizarea şi recombinarea superficială, emisia secundară electronică, emisia autoelectronică, emisia termo-ionică sau electronică, etc.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3. *Interacțiuni ale particulelor electrizate cu câmpurile magnetice și electrice prezente in plasma.*

Procesele elastice se caracterizează prin faptul că energia internă totală a partenerilor nu se modifică cu ocazia ciocnirii

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{final} - \varepsilon_{initial} = 0 .$$

În acest proces starea cuantică a fiecărei particule care ia parte în procesul de interacțiune rămâne neschimbată în urma ciocnirii.

În procesele neelastice energia internă a cel puțin unuia dintre parteneri se modifică

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{final} - \varepsilon_{initial} \neq 0$$

și avem ciocniri neelastice directe de speța I când $\Delta\varepsilon > 0$ și ciocniri neelastice inverse de speța II când $\Delta\varepsilon < 0$. În ciocnirile directe energia internă a cel puțin unuia dintre parteneri crește în cazul excitării atomului prin coliziunea sa cu un electron rapid. În ciocnirile inverse cel puțin una dintre particule cedează energie cinetică (ciocnire superelastică).

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.2. Interacțiunea binară si legile de conservare.

Ne propunem să analizăm pe scurt ciocnirea a două particule α şi β şi folosim legile de conservare a impulsului şi energiei, făcând abstracție de structura particulelor şi de natura forțelor de interacțiune dintre ele.

Legea de conservarea a impulsului înainte şi după ciocnire se scrie[1]:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta \qquad 2.1$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' \qquad 2.2$$

unde m_α, m_β, $\mathbf{v}_\alpha$ si $\mathbf{v}_\beta$ sunt masele şi vectorii viteză ai particulelor. Legea de conservare a energiei face posibilă determinarea variației energiei cinetice a sistemului în timpul ciocnirii

$$K = K_\alpha + K_\beta = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} \qquad 2.3$$

În general relația de mai sus se poate scrie

$$K = K' + \Delta\varepsilon \qquad 2.4$$

$$\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} = \frac{m_\alpha v_\alpha'^2}{2} + \frac{m_\beta v_\beta'^2}{2} + \Delta\varepsilon \qquad 2.5$$

unde $\Delta\varepsilon$ reprezintă variația energiei interne a particulelor ca rezultat al ciocnirii. Pentru a descrie procesul de ciocnire dintre particule este mai elegant să ne raportam la sistemul centrului de masă. Coordonata

[1] Peste tot in text literele scrise cu aldine sunt vectori.

BCU "BABEŞ-BOLYAI" UNIVERSITY LIBRARY

centrului de masă a unui sistem format din două particule este dată de relația:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_\alpha \mathbf{r}_\alpha + m_\beta \mathbf{r}_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \qquad 2.6$$

unde $\mathbf{r}_\alpha$ si $\mathbf{r}_\beta$ sunt razele vectorilor de poziție ale particulelor α şi β iar viteza centrului de masă se scrie sub forma

$$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta}{m_\alpha + m_\beta} . \qquad 2.7$$

Deoarece viteza centrului de masă nu se schimbă în timpul şi nici după ciocnire, putem spune că centrul de masă este în repaus, adică $\mathbf{v}_0 = 0$. În aceste condiții din ecuația de mai sus se obține

$$m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta = 0 \qquad 2.8$$

$$\mathbf{v}_{\beta 0} = -\frac{m_\alpha}{m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha 0} . \qquad 2.9$$

Dacă ținem seama de viteza relativă a particulelor atât în sistemul laboratorului cât şi în sistemul centrului de masă se obține

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{\alpha 0} - \mathbf{v}_{\beta 0} . \qquad 2.10$$

Înlocuind această relație în ecuația de mai sus, se obțin vitezele particulelor în sistemul centrului de masă

BCU ASIS CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\mathbf{v}_{\alpha 0} = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\mathbf{v} \qquad 2.11$$

$$\mathbf{v}_{\beta 0} = -\frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}\mathbf{v}\,. \qquad 2.12$$

În acest caz mişcarea particulelor este complet determinată de viteza centrului de masă $\mathbf{v}_0$ şi de viteza relativă $\mathbf{v}$. Ţinând seama de relaţiile de mai sus, legătură dintre vitezele particulelor în sistemul laboratorului şi viteza centrului de masă este:

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\alpha 0} = \mathbf{v}_0 + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\mathbf{v} \qquad 2.13$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\beta 0} = \mathbf{v}_0 - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}\mathbf{v}\,. \qquad 2.14$$

Cu ajutorul ecuaţiilor de mai sus putem determina energia cinetică înainte de ciocnire

$$K = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} = \left(\frac{m_\alpha + m_\beta}{2}\right) v_0^2 + \frac{\mu_{\alpha\beta} v^2}{2}\,. \qquad 2.15$$

Primul termen din partea dreapta se numeşte energia centrului de masă şi cel de-al doilea termen reprezintă energia mişcării relative, iar cantitatea $\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$ se numeşte masa redusă a sistemului. Folosind ecuaţia de mai sus se poate scrie legea conservării energiei pentru ciocnirea celor doua particule în felul următor:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{(m_\alpha + m_\beta)v_0^2}{2} + \frac{\mu_{\alpha\beta}v^2}{2} = \frac{(m_\alpha + m_\beta)v_0'^2}{2} + \frac{\mu_{\alpha\beta}v'^2}{2} + \Delta\varepsilon \quad 2.16$$

Deoarece în timpul ciocnirii viteza centrului de masă şi energia cinetică rămân neschimbate, se obţine:

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu v'^2}{2} + \Delta\varepsilon . \quad 2.17$$

Ne propunem să discutăm ciocnirea elastică. Vectorul viteză relativă $\Delta\varepsilon = 0$ nu-şi schimbă valoarea însa îşi schimbă direcţia. Definim rotaţia vectorului dată de doua unghiuri θ şi φ corespunzătoare sistemul de coordonate sferice. Fie unghiul θ unghiul dintre vectorii viteze înainte şi după ciocnire, $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{v}'$ pe care-l numim unghi de împrăştiere, vezi figura 2.1. Unghiul φ determină poziţia planelor de interacţiune (planul în care se întind vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{v}'$) relativ la un plan fixat prin vectorul $\mathbf{v}$.

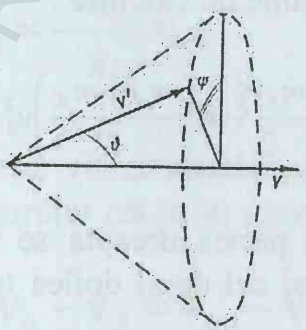

Figura 2.1.
Coordonatele sferice ale sistemului [3].

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Mai departe exprimăm modificarea impulsului şi energiei cinetice a particulelor care se ciocnesc în termenii unghiurilor θ şi φ. Modificarea impulsului particulei α este

$$\Delta \mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha - m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}'_{\alpha 0} - m_\alpha \mathbf{v}_{\alpha 0} \qquad 2.18$$

care poate fi scrisă ţinând cont de ecuaţia 2.9 în funcţie numai de vitezele relative

$$\Delta \mathbf{p}_\alpha = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\Delta \mathbf{v}. \qquad 2.19$$

Cantitatea Δv poate fi exprimată în funcţie de unghiurile θ şi φ. Pentru aceasta se reprezintă proiecţiile pe direcţia lui v

$$\Delta \mathbf{v}_{(1)} = \mathbf{v}\cos\theta - \mathbf{v} = -\mathbf{v}(1-\cos\theta)$$

şi două proiecţii perpendiculare pe v

$$\Delta \mathbf{v} = -(1-\cos\theta)\mathbf{v} = -(1-\cos\theta)(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta).$$

Înlocuind în egalitatea de mai sus se obţine:

$$\Delta \mathbf{p}_\alpha = -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}(1-\cos\theta)(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) = -\mu_{\alpha\beta}(1-\cos\theta)(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta). \qquad 2.20$$

Se poate vedea din relaţia de mai sus că variaţia impulsului este direct proporţională cu viteza relativă a particulelor care se ciocnesc. Dependenţa sa de unghiul

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

de împrăştiere este dată de factorul $1-cos\theta$ care are valoarea maximă pentru ciocniri frontale ($\vartheta=\pi$, $cos\vartheta=-1$) şi are valoarea minimă pentru ciocnirile nefrontale ($\vartheta=0$, $cos\vartheta=1$).
Pentru ciocnirea particulelor cu viteza mică ($\mathbf{v}_\alpha << \mathbf{v}_\beta$) ecuaţia 2.16 conduce la pierderile relative ale impusului în procesul de ciocnire:

$$\frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha}=-\frac{m_\alpha}{m_\alpha+m_\beta}(1-cos\theta) \qquad 2.21$$

a cărui valoare maximă este determinată de raportul maselor. În ciocnirea unei particule cu masă mai mare cu o particulă cu masă mult mai mică ($m_\alpha << m_\beta$), impulsul îşi schimbă semnul:

$$\left|\frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha}\right|_{\max}=2. \qquad 2.22$$

Când masele particulelor sunt comparabile ($m_\alpha \approx m_\beta$) impulsul este zero, şi în final în ciocnirea unei particule grele cu o particulă uşoară ($m_\alpha >> m_\beta$) pierderea maximă a impulsului este de ordinul raportului m_β / m_α.
Variaţia energiei cinetice a particulelor în sistemul laboratorului ca rezult al ciocnirii este dată de:

$$\Delta K_\alpha=\frac{m_\alpha v_\alpha'^2}{2}-\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}=\frac{m_\alpha}{2}\left[(\mathbf{v}_0+\mathbf{v}'_{\alpha 0})^2-(\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_{\alpha 0})^2\right]. \qquad 2.23$$
$$=m_\alpha \mathbf{v}_0(\mathbf{v}'_{\alpha 0}-\mathbf{v}_{\alpha 0})=\mathbf{v}_0\Delta\mathbf{p}_\alpha$$

Folosind ecuaţia 2.16 şi ţinând cont de ecuaţiile 2.6 şi 2.8 obţinem:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\Delta K_\alpha = -\left(\frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\right)\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)(1-\cos\theta) = \quad 2.24$$

$$-\frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2}(1-\cos\theta)\left[m_\alpha v_\alpha^2 - m_\beta v_\beta^2 + (m_\beta - m_\alpha)\mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\beta\right]$$

Dacă distribuția particulelor β este izotropă, atunci, după mediere cel de-al treilea termen din paranteză devine egal cu zero, şi astfel se obține:

$$\Delta K_\alpha = -2\frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2}(1-\cos\theta)\left(\frac{m_\alpha v_\alpha^2 - m_\beta v_\beta^2}{2}\right) =$$

$$-\kappa_{\alpha\beta}(1-\cos\theta)(K_\alpha - K_\beta) \qquad 2.25$$

unde coeficientul $\kappa_{\alpha\beta}$ caracterizează variația energiei în timpul ciocnirii (acest termen este adesea numit şi coeficientul transferului de energie). Se poate vedea că variația energiei dintre particulele care se ciocnesc este proporțională cu variația energiilor inițiale. Dependența eficienței schimbului de energie în funcție de unghiurile de împrăştiere este determinată de factorul $1-\cos\theta$. Raportul maselor este determinat de coeficientul κ care este maxim pentru $m_\alpha = m_\beta$ ($\kappa_{max} = 0.5$) şi este mult mai mic pentru $m_\alpha << m_\beta$ sau $m_\alpha >> m_\beta$.

Expresia poate fi uşor simplificată pentru cazul ciocnirii electronilor cu particulele grele (atomii si ionii) când masele particulelor care se ciocnesc diferă, $m_\alpha = m_e << m_\beta = m_a$. Pentru energiile atomilor $K_\alpha < K_\beta$ viteza $v_\alpha = \sqrt{2K_a / m_a}$ este mult mai mică decât viteza electronului: $v_\alpha = v_e >> v_\beta = v_a$.

BCU ASOCIATIA UNIVERSITARA IBRARY

2.3. Integralele caracteristice ale ciocnirilor.

Consideram particulele α şi β care se ciocnesc în unitatea de volum şi unitatea de timp. Numărul de perechi ale particulelor care se ciocnesc şi care au viteza relativă în intervalul v şi $v+dv$ poate fi scris în felul următor $n_\alpha n_\beta f_{\alpha\beta} dv$ unde $f_{\alpha\beta}(v)dv$ este fracţiunea de perechi cu vitezele relative în intervalul selectat mai sus. Numărul de ciocniri care au loc în unitatea de volum pe unitatea de timp, ţinând seama de împrăştierea în unghiul solid $d\Omega$ este determinat de relaţia

$$dq_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta \sigma_{\alpha\beta} v f_{\alpha\beta}(v) dv d\Omega . \qquad 2.26$$

Pentru a calcula numărul total de ciocniri efectuate de o particulă cu o viteza dată, integram relaţia 2.26 pe unghiurile solide în care are loc împrăştierea

$$dQ = n_\alpha n_\beta v s_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}(v) dv \qquad 2.27$$

unde cantitatea

$$s_{\alpha\beta} = \int \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta \qquad 2.28$$

reprezintă secţiunea totală de împrăştiere.
În aproximaţia clasică secţiunea eficace totală de ciocnire determină aria suprafeţei perpendiculare pe viteza relativă a particulele care se ciocnesc.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Mărimea

$$\nu_{\alpha\beta}(v) = n_\beta v s_{\alpha\beta}(v) \qquad 2.29$$

care apare în ecuația 2.28 este frecvența de ciocnire a particulelor α și β (sau numărul de ciocniri pe unitatea de timp). Numărul de ciocniri pe unitatea de timp este egal cu produsul dintre viteza, secțiunea eficace de ciocnire și concentrația particulelor țintă. Timpul dintre ciocniri este dat de relația:

$$\tau_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{\nu_{\alpha\beta}(v)}. \qquad 2.29$$

De asemenea se poate stabili și drumul liber mediu de ciocnire, ca fiind distanța medie dintre două ciocniri

$$\lambda_{\alpha\beta}(v) = v\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{n_\beta s_{\alpha\beta}(v)}. \qquad 2.30$$

Pentru a descrie efectul ciocnirilor elastice este ușor de introdus integrala secțiunii de ciocnire care caracterizează variația impulsului și energiei în timpul ciocnirii. Potrivit ecuațiilor 2.16 și 2.19 aceasta este determinată de factorul $1-\cos\vartheta$. Expresia pentru secțiunea eficace are următoarea formă:

$$s'_{\alpha\beta} = \int_\Omega (1-\cos\vartheta)\sigma_{\alpha\beta}(\vartheta)d\Omega$$
$$= 2\pi\int_0^\pi \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta)(1-\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta. \qquad 2.31$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Factorul $1-\cos\vartheta$ este zero când $\vartheta \to 0$, atunci integrala converge pentru toate tipurile de ciocniri *electron-atom* şi *ion-atom*. Această integrală de ciocnire s^t care defineşte variaţia energiei şi impulsului în ciocnirile elastice se numeşte ***secţiunea eficace de transport.***
Alături de secţiunea eficace de transport putem introduce şi alte mărimi caracteristice integralei de ciocnire cum ar fi ***frecvenţa de ciocnire, timpul dintre ciocniri, şi drumul liber mediu:***

$$\nu^t_{\alpha\beta}(v) = n\beta s^t_{\alpha\beta}(v)v$$

$$\tau^t_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{n_\beta s^t_{\alpha\beta}(v)v} \qquad 2.32$$

$$\lambda^t_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{n_\beta s^t_{\alpha\beta}(v)}.$$

În general, toate aceste caracteristici ale integralei de ciocnire depind de viteza relativă a particulelor, însă la efectuarea calculelor trebuie să mediem peste vitezele particulelor care se ciocnesc.
Ne propunem să determinăm, folosind secţiunea eficace de transport variaţia energiei cinetice care apare în timpul ciocnirii elastice. Variaţia energiei cinetice a particulelor de tipul α care se ciocnesc cu particulele de tipul β este determinată de relaţia 2.19. Multiplicând această relaţie cu numărul de ciocniri care au loc pe unitatea de volum şi unitatea de timp, se obţine variaţia energiei particulelor α în unitatea de volum ca rezultat al ciocnirii:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$d(n_\alpha K_\alpha) = -\kappa_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta v \sigma_{\alpha\beta}(1-\cos\vartheta)(K_\alpha - K_\beta) f_{\alpha\beta}(v) dv d\Omega .$$

Integrând pe unghiul solid şi pe viteze găsim variaţia energiei particulelor de tip α pe unitatea de timp:

$$\frac{dK_\alpha}{dt} = -\kappa_{\alpha\beta} \int_{(v)} n_\beta s'_{\alpha\beta}(v) v (K_\alpha - K_\beta) f_{\alpha\beta}(v) dv$$
$$= -\kappa_{\alpha\beta} \int_{(v)} \nu'_{\alpha\beta}(v)(K_\alpha - K_\beta) f_{\alpha\beta}(v) dv \qquad 2.33$$

O expresie similară se obţine şi pentru variaţia impulsului; deci variaţia medie a impulsului pe unitatea de timp a particulelor α ca rezultat al ciocnirilor elastice efectuate cu particulele β este dată de:

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = -\mu_{\alpha\beta} \int_{(v)} \nu'_{\alpha\beta}(v)(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) f_{\alpha\beta}(v) dv . \qquad 2.34$$

Discutăm acum determinarea secţiunilor eficace pentru ciocnirile neelastice, dată de ecuaţia 2.28

$$s^{(j)}_{\alpha\beta} = 2\pi \int_0^\pi \sigma^{(j)}_{\alpha\beta} \sin\vartheta d\vartheta \qquad 2.35$$

care reprezintă numărul de ciocniri neelastice de tipul j. Ca şi în cazul ciocnirilor elastice se introduce frecvenţa de ciocnire sub forma $\nu^{(j)}_{\alpha\beta} = n_\beta v s^{(j)}_{\alpha\beta}$. Variaţia energiei electronilor în timpul ciocnirilor elastice cu atomii este determinată de secţiunea eficace totală de ciocnire (ecuaţia 2.35) şi de frecvenţa de ciocnire. În fiecare ciocnire variaţia energiei electronilor este practic egală

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu energia interna a atomului $\Delta K_e = -\varepsilon_{0j}$ conform legii de conservare a energiei, variația energiei cinetice a atomului este de ordinul raportului m_e / m_a. Multiplicând ΔK_e cu numărul de ciocniri pe unitatea de volum şi unitatea de timp şi mediind peste viteze obținem variația medie a energiei electronului ca rezultat al ciocnirii:

$$\left(\frac{d\overline{K}_e}{dt}\right)_{ea}^{(j)} = -\varepsilon_{0j}\int n_a v s_{ea}^{(j)} f_e(v)dv = -\overline{\nu}_{ea}^{(j)}\varepsilon_{0j} \qquad 2.36$$

unde $s_{ea}^{(j)}$ este secțiunea eficace totală şi $\nu_{ea}^{(j)}$ este frecvența mediată pe vitezele electronilor (viteza relativă în ciocnirea atom-electron este practic egală cu viteza electronului). Pierderile de energie în ciocnirile neelastice se obțin sumând expresiile 2.36 peste toate procesele posibile de ionizare şi excitare:

$$\left(\frac{d\overline{K}_e}{dt}\right)_{ea}^{n} \approx -\sum_j \overline{\nu}_{ea}^{(j)}\varepsilon_{0j}\,. \qquad 2.37$$

Când energia medie a electronului este mult mai mică decât energia de excitare a nivelului atomic cel mai jos în scara energiei ε_{01}, procesele neelastice sunt date de către electronii ale căror energii se găsesc în coada funcției de distribuție. Fiecare nivel energetic este excitat de electronii care au o energie apropiată de energia de excitare şi astfel se poate afirma că ciocnirile neelastice conduc la pierderea totală a energiei electronului.

Expresia care determină pierderea totală a energiei electronului are următoarea forma:

$$\left(\frac{dK_e}{dt}\right)_{ea}^{n} \approx -\sum_j \nu_{ea}^{(j)} K_e = -\nu_{ea}^{n} K_e \qquad 2.38$$

unde $\nu_{ea}^{n} = n_a v s_{ea}^{n} = n_a v_j \sum_j s_{ea}^{j}$ este suma frecvențelor ciocnirilor neelastice.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3. Ecuațiile cinetice ale particulelor încărcate

3.1. Funcții de distribuție.

Așa cum am precizat în capitolul I, plasma reprezintă un număr mare de particule în continuă mișcare și interacțiune. Descrierea cu acuratețe a acestui ansamblu, bazându-ne numai pe analiza traiectoriilor tuturor componentelor plasmei este practic imposibilă. De cele mai multe ori aceste probleme se pot rezolva prin metode statistice. Principala caracteristică a statisticii este folosirea unui ansamblu de particule care este caracterizat de funcția de distribuție. Pentru găsirea acestei funcții de distribuție, spațiul configurațiilor și cel al vitezelor trebuie împărțit în intervale mici astfel încât variația concentrației particulelor din fiecare interval să fie neglijabilă. Dacă concentrația particulelor din aceste intervale este suficient de mare, fluctuațiile asociate agitației termice ale particulelor trebuie să fie mici. În acest caz putem spune că valoarea medie a numărului de particule din fiecare interval descrie comportarea ansamblului de particule. Valoarea medie a raportului numărului de particule din fiecare interval la intervalul respectiv se numește ***funcție de distribuție.***

Fie un element de volum din spațiul configurațiilor rdr. Poziția acestui element de volum este determinată de vectorul r care are coordonatele x,y,z și dimensiuni liniare dx, dy, dz. Notăm acest volum cu d^3r $(d^3r = dxdydz)$. Intervalul vitezelor cu variația valorilor proiecțiilor în intervalul $v_x, v_x + dv_x$, $v_y, v_y + dv_y$, și cu $v_z, v_z + dv_z$ este notată cu vdv. Acest

BCU ALEXANDRU IOAN CUZA UNIVERSITY LIBRARY

interval este analog cu cel al spațiului și poate fi privit ca elementul de volum din spațiul vitezelor a cărui poziție este dată de vectorul v și a cărui mărime este dată de dv_x, dv_y, dv_z, deci $d^3v = dv_x dv_y dv_z$.

Raza unui vector din spațiul șase-dimensional R are proiecțiile x, y, z, v_x, v_y, v_z și elementul de volum corespunzător este $d^6R = d^3r d^3v = dxdydzdv_x dv_y dv_z$.

Presupunând că alegerea coordonatelor din spațiul vitezelor satisface condițiile formulării de mai sus, putem scrie următoarea expresie pentru numărul mediu de particule dN_{rv} din spațiul șase-dimensional:

$$dN_{rv} = F(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^6R = F(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3r d^3v,$$

unde $F(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ este funcția de distribuție care determină numărul de particule dintr-un interval dat al componentelor spațiale și al vitezelor la un anumit moment de timp. Astfel se exprimă concentrația particulelor din spațiul 6-dimensional. Funcțiile de distribuție pot fi introduse pentru fiecare tip de particule (spre exemplu în plasma, pentru electroni, ioni și atomi). Dacă există particule excitate pe anumite stări interne (atomi în diferite stări excitate) este posibilă introducerea funcțiilor de distribuție ce caracterizează distribuția particulelor nu numai pe spațiul vitezelor și al coordonatelor dar și pe diferitele stări interne.

Să integrăm ecuația 3.1 pe spațiul vitezelor. Aceasta integrală va determina numărul particulelor din elementul de volum (concentrația) din spațiul configurațiilor:

$$dN_r = d^3r \int_v F(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^3v = n(\mathbf{r},t)d^3\mathbf{r} \qquad 3.1$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Acest număr este proporțional cu elementul de volum iar factorul de proporționalitate este egal cu concentrația particulelor

$$n(\mathbf{r},t)=\int_{v} F(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^3v\,. \qquad 3.2$$

Funcția de distribuție $F(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$ poate fi reprezentată ca următorul produs

$$F(\mathbf{v},\mathbf{r},t)=n(\mathbf{r},t)f(\mathbf{v},\mathbf{r},t) \qquad 3.3$$

unde funcția $f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$ este numită ***funcție de distribuție pe viteze.*** Condiția de normalizare se poate obține integrând ecuația 3.3 pe viteze. Ținând cont de ecuația 3.2 se găsește

$$\int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^3v=1. \qquad 3.4$$

Funcția de distribuție pe viteze $f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$ definește numărul relativ al particulelor cu vitezele în intervalul $\mathbf{v}d\mathbf{v}$ (într-un punct $\mathbf{r}$ din spațiu la un moment de timp dat).

În anumite situații care impun o problema unidimensională este util să se introducă funcția de distribuție în raport cu componentele vitezelor. Funcția de distribuție unidimensională se obține din integrarea lui $f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$ pe o singura componentă a vitezei,

$$f_x(v_x,\mathbf{r},t)=\int_{(v_y)}\int_{v_z} f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)dv_y dv_z \qquad 3.5$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

determinând astfel numărul relativ al particulelor cu componenta x a vitezei în intervalul $v_x, v_x + dv_x$. Condiția de normare este similară cu cea a ecuației 3.4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(v_x, \mathbf{r}, t)dv_x = 1.$$

De asemenea se poate introduce şi funcția de distribuție în raport cu valoarea absolută a vitezei. Aceasta se obține din $f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$ dacă se schimbă sistemul de coordonate cu cel al coordonatelor sferice din spațiul vitezelor şi se integrează pe coordonatele unghiulare. Elementul de volum din sistemul coordonatelor sferice este egal cu $d^3v = v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv$ şi funcția de distribuție este

$$f_v(v,\mathbf{r},t) = \int_{(\theta)}\int_{(\varphi)} f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)v^2 \sin\theta d\theta d\varphi . \qquad 3.6$$

Când $f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$ este izotropă atunci ecuația 3.6 ia forma $f_v(v,\mathbf{r},t) = 4\pi v^2 f(v,\mathbf{r},t)$. Funcția de distribuție a energiei cinetice se poate obține din ecuația 3.6 înlocuind intervalul de viteza dv cu energia corespunzătoare $f_v dv = f_k(K,r,t)dK$ sau $dK = mvdv$,

$$f_K = \frac{f_v}{mv} = \frac{f_v}{\sqrt{2mK}} \qquad 3.7$$

Cunoscându-se şi funcțiile de distribuție pe viteze ale particulelor dintr-o plasmă se pot obține informații despre valorile macroscopice ce caracterizează proprietățile plasmei.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Funcțiile de distribuție determină și ratele proceselor în care sunt implicate particulele: ***schimbul de impuls și energie, excitare, ionizare, recombinare.*** Numărul ciocnirilor binare dintre particulele α și β cu vitezele cuprinse în elementele de volum $v_\alpha dv_\alpha$ și $v_\beta dv_\beta$, poate fi scris în felul următor:

$$dQ_{\alpha\beta}^{(p)}(\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{v}_\beta,\theta) = (n_\alpha f_\alpha d^3v_\alpha)(n_\beta f_\beta d^3v_\beta)v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(p)}d\Omega \qquad 3.9$$

unde primii doi factori definesc concentrația particulelor α și β cu viteza relativă $\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$ și $\sigma_{\alpha\beta}^{(p)}$ este secțiunea de ciocnire diferențială a particulelor de tip p. Numărul total al acestor ciocniri din unitatea de volum și din unitatea de timp se obține integrând pe componentele unghiulare și vitezele particulelor α și β

$$dQ_{\alpha\beta}^{(p)} = n_\alpha n_\beta \int_{(v_\alpha)}\int_{(v_\beta)} v_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta d^3v_\alpha d^3v_\beta \int_{(\Omega)} \sigma_{\alpha\beta}^{(p)} d\Omega$$
$$= n_\alpha n_\beta \left\langle v_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}^{(p)}(v_{\alpha\beta}) \right\rangle \qquad 3.10$$

Această expresie de mai sus poate fi scrisă și în termenii frecventelor de ciocnire,

$$Q_{\alpha\beta}^{(p)} = n_\alpha \left\langle \nu_{\alpha\beta}^{(p)} \right\rangle = n_\beta \left\langle \nu_{\beta\alpha}^{(p)} \right\rangle \qquad 3.11$$

unde $\nu_{\alpha\beta}^{(p)} = n_\beta v_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}^{(p)}(v_{\alpha\beta})$.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.2. Ecuațiile cinetice.

În acest paragraf ne propunem să obținem ecuația funcției de distribuție a particulelor încercate, $F = nf$. Funcția de distribuție care reprezintă concentrația plasmei din spațiul șase dimensional ne va furniza numărul de particule din fiecare element de volum. De aceea, pentru a determina variația funcției de distribuție trebuie să ținem seama de factorii care modifică numărul de particule din spațiul șase dimensional.

Pentru început determinăm variația numărului de particule din elementul de volum rdr și vdv. Fie un flux de particule care intră în elementul de volum pe direcția x și prin aria mărginită de $dydz$ (figura 3.1). În intervalul de timp dt toate particulele care au viteza mai mică decât $v_x dt$ trec prin acest volum. Numărul de particule egal cu produsul concentrației particulelor care au viteza în intervalul nfd^3v și volumul mărginit de aria $dydz$ cu înălțimea $v_x dt$, este $(nfv_x)_x dtd^3vdydz$, valorile lui n, f, v_x fiind determinate în fiecare punct x. Numărul de particule care ies din elementul de volum prin aria $dydz$ este obținut în mod similar, și este egal cu $(nfv_x)_{x+dx} dtd^3vdydz$.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

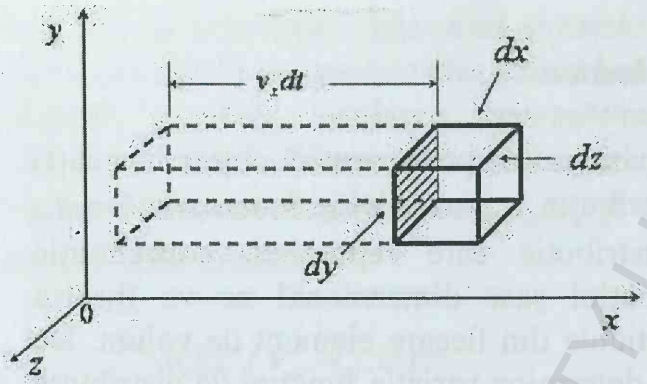

Figura 3.1.
Fluxul de particule în direcția x care traversează aria dydz [3].

Diferența dintre cele două fluxuri determină variația numărului de particule din volum de-a lungul axei x:

$$\left[\frac{\partial(nf)}{dt}\right]_x dtd^3rd^3v = [(nfv_x)_x - (nfv_x)_{x+dx}]dtd^3vdydz =$$

$$= -\left[\frac{\partial(nfv_x)}{\partial x}\right]dtd^3rd^3v$$

Această diferență dintre valorile nfv_x din cele două puncte spațiale este dată de derivată parțială în raport cu x pentru cele șase variabile (t, y, z, v_x, v_y, v_z). Integrând după dt, d^3r și d^3v găsim variația funcției de distribuție dată de mișcarea particulelor de-a lungul axei x:

$$\left[\frac{\partial(nf)}{dt}\right]_x = -\frac{\partial(nfv_x)}{\partial x} = -v_x\frac{\partial(nf)}{\partial x}$$

BCU IASI GENERAL UNIVERSITY LIBRARY

Expresii similare se pot obține și pentru componentele $(\partial nf/dt)_y$ și $(\partial nf/\partial t)_z$. Suma tuturor componentelor ne conduce la variația funcției de distribuție dată de mișcarea particulelor:

$$\left[\frac{\partial(nf)}{dt}\right]_r = -v_x\frac{\partial(nf)}{\partial x} - v_y\frac{\partial(nf)}{\partial y} - v_z\frac{\partial(nf)}{\partial z} = vgrad(nf) \quad 3.11$$

Fie acum variația numărului de particule din elementul de volum rdr, vdv cauzată de modificarea vitezei. Considerăm fluxul de particule care intră în elementul de volum din spațiul vitezei prin aria $dv_y dv_z$, vezi figura 3.2. de mai jos. Numărul total de particule din elementul de volum d^3r este egal cu nd^3r. Fracțiunea particulelor cu o componentă x cuprinsă în intervalul $\Delta v_x = a_x dt$ și cu componentele v_y și v_z este $fa_x dt dv_y dv_z$. Numărul particulelor care intră în elementul de volum prin aria mărginită de $dv_y dv_z$ (figura 3.2) este egal cu $(nfa_x)_{v_x} dtd^3r dv_y dv_z$, iar valorile lui n, f, a_x trebuie determinate pentru componenta v_x a vitezei. Numărul de particule care părăsesc elementul de volum din cauza modificării vitezei se obține în mod similar, cu componenta vitezei cuprinsă în intervalul $v_x + dv_x$, și este egal cu $(nfa_x)_{v_x+dv_x} dtd^3r dv_y dv_z$.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

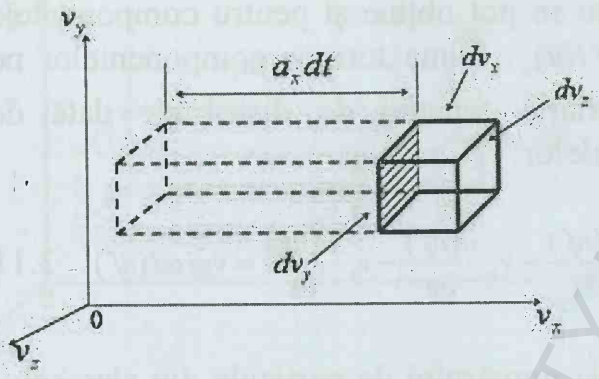

Figura 3.2.
Fluxul de particule din spațiul vitezelor care traversează aria $dv_y dv_z$ [3].

Diferența dintre cele două fluxuri determină numărul total al particulelor cu modificarea accelerației în direcția axei x:

$$\left[\frac{\partial(nf)}{\partial t}\right]_{v_x} dtd^3rd^3v = -\left[\frac{\partial(nfa_x)}{\partial v_x}\right] dtd^3rd^3v$$

unde derivatele parțiale $\partial/\partial v_x$ sunt date de valorile fixate ale variabilelor (t,x,y,v_y,v_z). Relații similare se pot obține și pentru variațiile numărului de particule date de accelerații în direcțiile y și z. Suma lor determină variația totală a funcției de distribuție ca rezultat al variației vitezei particulelor:

$$\left[\frac{\partial(nf)}{\partial t}\right]_v = -\frac{\partial}{\partial v_x}(nfa_x) - \frac{\partial}{\partial v_y}(nfa_y) - \frac{\partial}{\partial v_z}(nfa_z). \quad 3.12$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Accelerația care apare în ecuația 3.12 este rezultatul forțelor care acționează asupra particulelor. În general, particulele plasmei pot fi influențate de câmpuri electrice şi magnetice. Într-un asemenea caz accelerația se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\left(Ze\mathbf{E} + \frac{Ze}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}] \right) \qquad 3.13$$

unde E si H sunt intensitățile câmpurilor electrice şi magnetice. Când se introduce ecuația 3.13 în ecuația 3.12 trebuie să ținem seama că fiecare componentă a accelerației este independentă de componenta paralelă a vitezei. De aceea ecuația 3.12 se poate scrie:

$$\left[\frac{\partial(nf)}{\partial t}\right]_v = -a_x \frac{\partial(nf)}{dv_x} - a_y \frac{\partial(nf)}{dv_y} - a_z \frac{\partial(nf)}{\partial v_z} = -a\,grad_v(nf)$$

unde $grad_v$ este operatorul gradientului în spațiul vitezelor cu componentele $\partial/\partial v_x$, $\partial/\partial v_y$, $\partial/\partial v_z$.

Ținând cont de ecuația 3.14 găsim că variația funcției de distribuție dată de accelerația în câmpuri electrice şi magnetice este:

$$\left[\frac{\partial(nf)}{\partial t}\right]_{E,H} = -\frac{Ze}{m}\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{H}}{c}\right] grad_v(nf). \qquad 3.14$$

Interacțiunea forțelor care acționează asupra particulelor plasmei poate fi împărțită în două clase. Cea dintâi este asociată cu mişcarea colectivă a unui număr relativ mare de particule. Aceste forțe pot rezulta din separarea sarcinilor şi curenților care duc la apariția câmpurilor electrice şi magnetice.

BCU BUCUREŞTI UNIVERSITY LIBRARY

A doua clasă de interacțiune se reduce la ciocniri. După cum am menționat în capitolul 2 ciocnirile elastice și neelastice ale particulelor încărcate cu neutrii pot fi privite ca și ciocniri punctuale în cinetica plasmei. Aceasta înseamnă că efectul ciocnirilor asupra traiectoriilor particulelor încărcate poate fi redus la schimbarea instantanee a vectorului viteză al particulelor. De aceea, interacțiunea Coulomb a particulelor încărcate poate fi reprezentată ca o succesiune de ciocniri punctuale. Fiecare ciocnire este privită ca un act dual: dispariția particulelor încărcate și apariția particulelor cu un nou vector viteză în același loc. Ciocnirile elastice și neelastice împreună cu ionizarea și recombinarea pot fi privite ca ducând la variația numărului de particule din spațiul șase dimensional. O asemenea variație a elementului de volum rdr, vdv dată de ciocniri se poate scrie:

$$\frac{\delta(n_\alpha f_\alpha)}{\delta t} = \sum_\beta \sum_p S_{\alpha\beta}^{(p)}(n_\alpha f_\alpha) \qquad 3.15$$

suma efectuându-se pe toate particulele β și pe toate tipurile de ciocniri p. Adăugând acest termen în ecuațiile 3.12 și 3.14 se obține:

$$\frac{\partial(nf)}{\partial t} = -v\,grad(nf) - \left(\frac{Ze}{m}\right)\left[E + \frac{1}{c}(v \times H)\right] grad_v(nf) + \frac{\partial(nf)}{\partial t}$$

sau trecând termenul al doilea și cel de-al treilea în partea stângă obținem ecuația cinetică

$$\frac{\partial(nf)}{\partial t} + v\,grad(nf) + \left(\frac{Ze}{m}\right)\left[E + \frac{1}{c}(v \times H)\right] grad_v(nf) = \frac{\delta(nf)}{\delta t} \qquad 3.16$$

Aceasta ecuație este denumită ***ecuația cinetica a lui Boltzmann***. Se poate scrie pentru toate tipurile de particule (electroni, ioni, și particule neutre). Pentru a stabili forma particulară a acestei ecuații este necesară cunoașterea câmpurilor electrice și magnetice E si H precum și forma termenului de ciocnire. După cum se știe câmpurile electrice și magnetice pot fi induse numai de sursele externe, dar variația spațială și curenții sunt create de particulele încărcate ale plasmei.

3.3. Termenul de ciocnire al ecuației cinetice.

Consideram pentru început variația funcției de distribuție datorată ciocnirilor elastice dintre particulele de tip α și cele de tip β. Numărul particulelor α din elementul de volum $\mathbf{r}d\mathbf{r}$ cu vitezele cuprinse în intervalul $\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$ este:

$$dN_\alpha = n_\alpha(\mathbf{r}) f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v}_\alpha) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}_\alpha .$$

Considerând ciocnirile punctuale, presupunem că schimbarea vitezelor particulelor implicate în ciocnire nu afectează pozițiile lor în spațiul configurațiilor. În particular, fiecare ciocnire elastică din spațial vitezelor schimbă viteza unei particule α și o scoate afară din acest interval. Determinăm numărul de ciocniri ale particulelor de tip α care se ciocnesc cu particulele de tip β care se deplasează cu viteză $\mathbf{v}_\beta d\mathbf{v}_\beta$ și a căror concentrație este: $dn_\beta = n_\beta(\mathbf{r}) f_\beta(\mathbf{r},\mathbf{v}_\beta) d^3 v_\beta$.

Numărul de ciocniri care au loc în unitatea de timp este determinat de secțiunea diferențială de ciocnire:

$$d^3 r dQ\left(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta \middle| \mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta\right) = dN_\alpha dn_\beta v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \theta) d\Omega = n_\alpha n_\beta f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \theta) d\Omega d^3 v_\alpha d^3 v_\beta d^3 r \quad 3.17$$

unde $\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$ este viteza relativă a particulelor. Numărul de particule α care dispar din elementul de volum din cauza ciocnirilor elastice cu particulele β se obține din ecuația de mai sus integrând după unghiurile de împrăştiere şi după vitezele particulelor β.

$$dQ^-_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta \int\limits_{(v\beta)} \int\limits_{(\Omega)} f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \theta) d\Omega d^3 v_\alpha d^3 v_\beta \quad 3.18$$

După ciocnire particulele α se mută în alt element de volum decât elementul de volum $\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$. În particular, ciocnirile particulelor din elementele de volum $\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_\alpha$ şi $\mathbf{v}'_\beta d\mathbf{v}'_\beta$ sunt determinate de unghiurile de rotație $\theta = -\theta$ şi $\Psi' = \Psi$ şi de viteza relativă (figura 3.3).

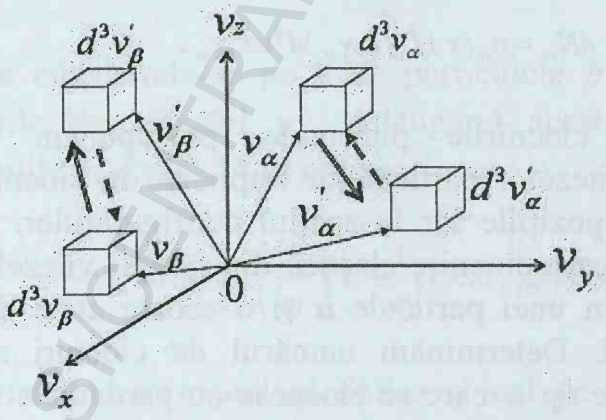

Figura 3.3.
Ciocnirile particulelor în funcție de unghiul de rotație al vectorului viteză relativă [3].

Numărul ciocnirilor pe unitatea de timp poate fi scris sub forma următoare:

$$dQ^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}'_\alpha,\mathbf{v}'_\beta,\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{v}_\beta)= \\ n_\alpha n_\beta f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta},\vartheta)d\Omega d^3v'_\alpha d^3v'_\beta \quad . \qquad 3.19$$

Această expresie ia în considerare viteza relativă care rămâne neschimbată în timpul ciocnirii elastice ($v'_{\alpha\beta}=v_{\alpha\beta}$). Numărul total al particulelor de tip α din elementul de volum $\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$ poate fi obținut integrând ecuația 3.19 peste toate combinațiile posibile ale unghiurilor Ω și vitezele $\mathbf{v}'_\alpha$ si $\mathbf{v}_\beta$:

$$dQ^{+}_{\alpha\beta}=n_\alpha n_\beta \int\limits_{(\Omega)}\int\limits_{(v'_\alpha)}\int\limits_{(v_\beta)} f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta},\vartheta)d\Omega d^3v'_\alpha d^3v'_\beta \quad . \qquad 3.20$$

Dacă luăm în considerare condiția $\mathbf{v}_\alpha = const$ și integrăm în raport cu variabilele $\mathbf{v}'_\alpha$ si $\mathbf{v}'_\beta$ (vitezele după ciocnire) și având în vedere ca iacobianul este egal cu unitatea $d^3v'_\alpha d^3v'_\beta = d^3v_\alpha d^3v_\beta$, ecuația de mai sus se scrie:

$$dQ^{+}_{\alpha\beta}=n_\alpha n_\beta \int\limits_{(\Omega)}\int\limits_{(v_\beta)} f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta},\vartheta)d\Omega d^3v'_\alpha d^3v'_\beta \qquad 3.21$$

unde vitezele $\mathbf{v}'_\alpha$ și $\mathbf{v}'_\beta$ pot fi exprimate prin $\mathbf{v}_\alpha$ și $\mathbf{v}_\beta$ respectând legea conservării energiei totale. Relațiile 3.18 și 3.21 fac posibilă calcularea variației numărului de particule de tip α din elementul de volum $\mathbf{r}d\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$ din cauza ciocnirilor elastice cu particulele de tip β:

BCU "ȘTIINȚĂ" UNIVERSITY LIBRARY

$$S^e_{\alpha\beta} d^3 v_\alpha = dQ^+_{\alpha\beta} - dQ^-_{\alpha\beta}$$

$$= n_\alpha n_\beta \left[\int\limits_{(v_\beta)} \int\limits_{(\Omega)} \left(f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta \right) \cdot v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_\beta \right] d^3 v_\alpha$$

unde am introdus notațiile $f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) = f'_\alpha$, $f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) = f'_\beta$. În final obținem rata variației funcției de distribuție în cazul ciocnirilor elastice:

$$S^e_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta \int\limits_{(v_\beta)} \int\limits_{(\Omega)} \left(f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta \right) \cdot v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_\beta . \qquad 3.22$$

În mod similar găsim variația funcției de distribuție în timpul ciocnirilor neelastice. Pentru cazul ciocnirilor neelastice luăm în considerarea modificarea stării interne a particulelor (ioni şi atomi). Când considerăm ciocnirile neelastice funcția de distribuție trebuie să conțină nu numai spațiul coordonatelor şi vitezelor ci şi stările interne ale particulelor. Ca şi mai sus determinăm variația numărului de particule de tip α din volumul elementar $\mathbf{r}d\mathbf{r}$ şi din spațiul vitezelor $\mathbf{v}d\mathbf{v}$ datorită ciocnirilor cu particulele de tip β care au ca efect variația energiei interne. Numărul de ciocniri, luând în considerare unghiurile de împrăştiere şi valorile vitezelor particulelor de tip β, se obține în mod asemănător cu ecuația 3.18:

$$dQ^- \left(\frac{j_\alpha j_\beta}{j'_\alpha j'_\beta} \right) = \qquad 3.23$$

$$n_\alpha n_\beta d^3 v_\alpha \int\limits_{(v_\beta)} \int\limits_{(\Omega)} f_\alpha(v_\alpha, j) f_\beta(v_\beta, j) v_{\alpha\beta} \sigma^{j_\alpha j_\beta}_{j'_\alpha j'_\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v_\beta$$

în care mărimea $\sigma_{j_\alpha j_\beta}^{j'_\alpha j'_\beta}$ este secțiunea eficace diferențială a procesului în cauză. Ca și mai sus determinăm numărul de procese neelastice inverse care conduc la apariția particulelor de tip α în intervalul de viteze $\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$:

$$dQ^+\left(\frac{j'_\alpha j'_\beta}{j_\alpha j_\beta}\right) = n_\alpha n_\beta$$

$$\int_{(\mathbf{v}'_\alpha)}\int_{(\mathbf{v}'_\beta)}\int_{(\Omega)} f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha, j'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta, j'_\beta)\cdot v'_{\alpha\beta}\sigma_{j_\alpha j_\beta}^{j'_\alpha j'_\beta}(v'_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3v'_\alpha d^3v'_\beta\Big|_{v_\alpha=const}$$

3.24

Deoarece integrarea trebuie făcută cu $\mathbf{v}_\alpha = const$, este mult mai comod să trecem de la variabilele $\mathbf{v}'_\alpha$ și $\mathbf{v}'_\beta$ la $\mathbf{v}_\alpha$ și $\mathbf{v}_\beta$. Pentru a face această înlocuire folosim principiul echilibrului detaliat potrivit probabilităților tranzițiilor directe și inverse între stările interne ale particulelor, care trebuie sa fie aceleași

$$v_{\alpha\beta}\sigma_{j_\alpha j_\beta}^{j'_\alpha j'_\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d^3v_\alpha d^3v_\beta d\Omega = v'_{\alpha\beta}\sigma_{j_\alpha j_\beta}^{j'_\alpha j'_\beta\prime}(v'_{\alpha\beta}, \vartheta) d^3v'_\alpha d^3v'_\beta d\Omega' .$$

Potrivit acestei ecuații obținem cu ajutorul ecuațiilor 3.23 și 3.24, variația numărului particulelor de tip α

$$S_{j_\alpha j_\beta}^{j'_\alpha j'_\beta} = \frac{dQ_{\alpha\beta}^+ - dQ_{\alpha\beta}^-}{d^3v_\alpha} =$$

$$= n_\alpha n_\beta \int_{v_\beta}\int_\Omega f_\alpha(v'_\alpha, j'_\alpha) f_\beta(v'_\beta, j'_\beta) -$$

$$- f_\alpha(v_\alpha, j_\alpha) f_\beta(v_\beta, j_\beta) v_{\alpha\beta}\sigma_{j_\alpha j_\beta}^{j'_\alpha j'_\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3v$$

.3.25

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Sumând ecuația 3.25 peste toate stările inițiale ale particulelor de tip β şi peste toate tranzițiile posibile (respectând j'_α si j'_β) obținem variația totală a funcției de distribuție a particulelor de tip α în ciocnire cu particulele de tip β:

$$S_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta \sum_{j\beta, j'_\alpha, j'_\beta} \int\int \left[f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta \right] \cdot v_{\alpha\beta} \sigma^{j'_\alpha j'_\beta}_{j_\alpha j_\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v_\beta \qquad 3.26$$

Expresia de mai sus include toate ciocnirile de două particule de tip α şi β. Termenul de ciocnire al ecuației cinetice pentru funcția de distribuție a particulelor de tip α (ecuația 3.15) se poate obține dacă sumăm ecuația 3.26 peste toate particulele de tip β. Suma conține o integrală care face posibilă ciocnirea particulelor de tip α unele cu altele $\alpha = \beta$ însă trebuie să includem factorul $1/2$. În general, termenul de ciocnire al ecuației cinetice este foarte complicat de aceea se mai numeşte ***integrala de ciocnire.***

O posibilitate mai simplă pentru a rezolva ecuația cinetică pentru electroni este să ținem seama de faptul că viteza electronilor este mult mai mare decât a particulelor încărcate. În cele mai multe cazuri se poate spune că şi energia medie a electronilor este mai mare decât energia particulelor grele. Integrala de ciocnire a electronilor cu particulele grele este practic independentă de funcția de distribuție. Ne propunem să determinăm variația concentrației electronilor a căror viteză se află în domeniul $v_e dv_e$. Aceasta concentrație este egală cu $n_e f_e d^3 v_e$. Rata de dispariție a electronilor

(din unitatea de volum) din spațiul vitezelor ca rezultat al ciocnirilor cu atomii este egală cu:

$$dQ^- = n_a n_e \int_{\Omega} v_e \sigma(v_e, \vartheta) d\Omega f_e(v_e) d^3 v_e . \qquad 3.27$$

Apariția electronilor într-un element de volum nou este cauzată de ciocnirile directe, deci rata de apariție are forma:

$$dQ^+ = n_a n_e \int_{\Omega} v_e' \sigma(v_e', \vartheta) d\Omega f_e(v_e') d^3 v_e'$$

unde unghiurile de ciocnire sunt date (fixate de $d\Omega$), și viteza electronilor după ciocnire este v_e'. Diferența dintre cele două mărimi dQ^+ și dQ^- are ca rezultat variația funcției de distribuție a electronilor:

$$S_{ea} d^3 v_e = dQ^+ - dQ^- =$$

$$n_e n_a \int_{\Omega} \left[v_e' \sigma(v_e', \vartheta) f_e(v_e') \cdot \frac{d^3 v_e'}{d^3 v_e} - v_e \sigma(v_e, \vartheta) f_e(v_e) \right] d\Omega d^3 v_e$$

$$\frac{d^3 v_e'}{d^3 v_e} = \frac{(v_e')^2 dv_e'}{v_e^2 dv_e} = \frac{v_e'^3}{v_e^3} .$$

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4. Plasmele de echilibru

4.1. Funcția de distribuție în plasmele de echilibru.

Considerăm o plasmă care se află în stare de echilibru termodinamic. Presupunem că avem un sistem închis, în absenta forțelor externe, astfel încât starea de echilibru este omogenă din punct de vedere spațial. Ecuația cinetică a particulelor într-o plasmă omogenă în absenta forțelor externe se scrie [3,4]:

$$\frac{\partial(n_\alpha f_\alpha)}{\partial t} = \frac{\delta(n_\alpha f_\alpha)}{\delta t}. \qquad 4.1$$

Presupunem că în această plasmă numai ciocnirile elastice joacă un rol important, iar în acest caz termenul de ciocnire care descrie ciocnirile elastice se scrie:

$$\sum_\beta S^e_{\alpha\beta} = n_\alpha \sum_\beta n_\beta \int_{(v_\beta)} \int_{(\Omega)} (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_\beta = 0. \qquad 4.2$$

Din ecuația 4.2 se obține o relație valabilă pentru funcțiile de distribuție ale perechii de particule α şi β care se ciocnesc,

$$f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) = f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta). \qquad 4.3$$

Condiția de mai sus arată că la echilibru ciocnirile nu afectează funcția de distribuție. Astfel la echilibru numărul particulelor care părăsesc elementul de volum din spațiul vitezelor în urma ciocnirilor este compensat

de numărul particulelor care intră în acelaşi element de volum. Acesta este principul echilibrului detaliat. Logaritmând relaţia de mai sus,

$$\ln f_\alpha(v'_\alpha)+\ln f_\beta(v'_\beta)=\ln f_\alpha(v_\alpha)+\ln f_\beta(v_\beta) \qquad 4.4$$

suma logaritmilor funcţiilor de distribuţie rămâne neschimbată în procesul de ciocnire, logaritmul fiind un invariant sumaţional de ciocnire. După cum se poate vedea avem patru combinaţii independente ale vitezelor particulelor a căror sumă rămâne neschimbată în procesul de ciocnire. Cele trei componente aparţin impulsului $p_k = mv_k$ şi cea de-a patra este energia $K = mv^2/2$; astfel încât se pot obţine trei combinaţii liniare sub forma următoare:

$$\ln f_\alpha = am_\alpha + b_x m_\alpha v_{\alpha x} + b_y m_\alpha v_{\alpha y} + b_z m_\alpha v_{\alpha z} - \frac{cm_\alpha(v_{\alpha x}^2+v_{\alpha y}^2+v_{\alpha z}^2)}{2} \qquad 4.5$$

$$b_x m_\alpha v_{\alpha x} - \frac{cm_\alpha v_{\alpha x}^2}{2} = -c\frac{m_\alpha}{2}(v_{\alpha x}-u)^2 - \frac{b_x^2}{2c}m_\alpha$$

$$b_y m_\alpha v_{\alpha y} - \frac{cm_\alpha v_{\alpha y}^2}{2} = -c\frac{m_\alpha}{2}(v_{\alpha y}-u)^2 - \frac{b_y^2}{2c}m_\alpha$$

$$b_z m_\alpha v_{\alpha z} - \frac{cm_\alpha v_{\alpha z}^2}{2} = -c\frac{m_\alpha}{2}(v_{\alpha z}-u)^2 - \frac{b_z^2}{2c}m_\alpha$$

$$\ln f_\alpha = am_\alpha - c\frac{m_\alpha}{2}\left[(v_{\alpha x}-u)^2+(v_{\alpha y}-u)^2+(v_{\alpha z}-u)^2\right] - \frac{1}{c}m_\alpha\left(\frac{b_x^2}{2}+\frac{b_y^2}{2}+\frac{b_z^2}{2}\right)$$

$$\ln f_\alpha = m_\alpha\left[a-\frac{1}{c}\left(\frac{b_x^2}{2}+\frac{b_y^2}{2}+\frac{b_z^2}{2}\right)\right] - c\frac{m_\alpha}{2}\left[(v_{\alpha x}-u)^2+(v_{\alpha y}-u)^2+(v_{\alpha z}-u)^2\right]$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se poate observa că suma logaritmilor pentru orice pereche de particule este aceeaşi iar coeficienţii a, b_k şi c sunt aceeaşi pentru toate particulele. Notând cu $b_x/c=u_x$, $b_y/c=u_y$, $b_z/c=u_z$ şi $c=1/T$, se găseşte:

$$f_\alpha = A\exp\left\{-\frac{m_\alpha}{2T}\left[(v_{\alpha x}-u_x)^2+(v_{\alpha y}-u_y)^2+(v_{\alpha z}-u_z)^2\right]\right\}$$

$$= A\exp\left[-\frac{m_\alpha}{2T}(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2\right] \qquad 4.6$$

unde $A=\exp\left\{m_\alpha\left[a-\frac{1}{c}\left(\frac{b_x^2}{2}+\frac{b_y^2}{2}+\frac{b_z^2}{2}\right)\right]\right\}$ este o constantă, care poate fi determinată din condiţia de normare

$$A\int_{(v)}\exp\left[-\frac{m_\alpha}{2T}(v-u)^2\right]d^3v = \qquad 4.7$$

$$A\int_{(v_x)}\int_{(v_y)}\int_{(v_z)}\exp\left[-\frac{m_\alpha}{2T}(v-u)^2\right]dv_x dv_y dv_z = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{m_\alpha}{2T}(v_k-u_k)^2\right]dv_k = \sqrt{\frac{2T}{m_\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\xi^2)d\xi = \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2T}{m_\alpha}}.$$

Înlocuind în relaţia 4.7 se obţine constanta $A=(m_\alpha/2\pi T)^{3/2}$. În aceste condiţii funcţia de distribuţie devine

$$f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)=\left(\frac{m_\alpha}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left[-\left(\frac{m_\alpha}{2T}(\mathbf{v}_\alpha-\mathbf{u})^2\right)\right] \qquad 4.8$$

Această distribuţie după viteze este cunoscută ca ***distribuţie Maxwelliană.*** Funcţia de distribuţie 4.8

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

poate fi reprezentată ca un produs de trei funcții unidimensionale: $f_\alpha(v_\alpha) = f_x(v_{\alpha x}) f_y(v_{\alpha y}) f_z(v_{\alpha z})$ unde

$$f_k(v_{\alpha k}) = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m_\alpha}{2T}(v_{\alpha k} - v_k)^2\right] \qquad 4.9$$

$$\langle v_{\alpha k}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\alpha k} f_k(v_{\alpha k}) dv_{\alpha k} = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\alpha k} \exp\left[-\frac{m_\alpha}{2T}(v_{\alpha k} - u_k)^2\right] dv_{\alpha k} .$$

$$= \frac{u_k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = u_k \qquad 4.10$$

Viteza u este adesea numită ***viteza elementului de fluid*** sau ***viteza medie***. Deoarece vectorul viteză u este același pentru toate particulele din plasmă, atunci acesta determină mișcarea plasmei ca un întreg.

Ne propunem să găsim energia cinetică medie a particulelor, adică ***energia medie a mișcării de agitație termică***,

$$\left\langle \frac{m_\alpha (v_{\alpha k} - u_k)^2}{2} \right\rangle = \frac{m_\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (v_k - u_k) 2 f_k(v_k) dv_k$$

$$= \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_\alpha (v_k - u_k)^2}{2} \exp\left[-\frac{m_\alpha (v_k - u_k)^2}{2T}\right] dv_k .$$

$$= \frac{T}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{T}{2}$$

Suma lor (ținând seama de cele trei axe de coordonate) conduce la media energiei termice

$$\left\langle \frac{m_\alpha (v_\alpha - \mathbf{u})^2}{2} \right\rangle = \sum_k \left\langle \frac{m_\alpha \left(u_{\alpha k} - u_k^2\right)}{2} \right\rangle = \frac{3T}{2} . \qquad 4.11$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Această ecuație arată că parametrul T care determină energia medie a mișcării de agitație termică este ***temperatura*** sistemului. Ciocnirile elastice conduc la distribuția Maxwelliană pe viteze a tuturor particulelor cu aceeaşi viteză medie şi cu aceeaşi energie cinetică medie.

Determinăm mai departe efectul pe care-l au ciocnirile neelastice asupra funcției de distribuție a particulelor aflate într-o plasmă de echilibru. Pentru aceasta ținem seama de termenul de ciocnire dat de ciocnirile neelastice. În acest caz legea conservării energiei se scrie:

$E_{\alpha j} = \frac{m_\alpha v_{\alpha j}^2}{2} + \varepsilon_{\alpha j}$, unde ultimul termen reprezintă energia internă a stării j. Şi în acest caz se poate scrie o combinație liniară care conține componentele impulsului şi energia:

$$\ln f_\alpha(v_\alpha, j_\alpha) = a + b m_\alpha v_\alpha - cE_{\alpha j} = a + b m_\alpha v_\alpha - \frac{c m_\alpha v_\alpha^2}{2} - c\varepsilon_{\alpha j}. \qquad 4.12$$

Cu ajutorul acestei ecuații se obține următoarea funcție de distribuție:

$$f_\alpha(v_\alpha, j_\alpha) = A \exp\left[-m_\alpha \frac{(v_\alpha - u)^2}{2T}\right] \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\alpha j}}{T}\right) \qquad 4.13$$

unde constanta A se obține din condiția de normare:

$$A\sum_j \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{T}\right)\int_{(v)} \exp\left[-m_\alpha \frac{(v-u)^2}{2T}\right] d^3v = 1$$

$$A = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T}\right)^{3/2}\left[\sum_j \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{T}\right)\right]^{-1} = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T}\right)^{3/2}\left[\sum_j {}^* g_j \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{T}\right)\right]^{-1}.$$

Înlocuind constanta A în ecuația 4.13 se găsește funcția de distribuție normată. Ea este data de relația

$$f(v_\alpha, j) = f_v(v_\alpha) f_j(j) \qquad 4.14$$

unde primul factor este distribuția Maxwelliană pe viteze iar cel de-al doilea factor este distribuția pe stările interne, adesea numită ***distribuția Boltzmann***

$$f_j = \frac{\exp(-\varepsilon_j / T)}{\sum_l \exp(-\varepsilon_l / T)} = \frac{\exp(-\varepsilon_j / T)}{\sum_l {}^* g_l \exp(-\varepsilon_l / T)}. \qquad 4.15$$

Şi în cazul ciocnirilor neelastice distribuția pe viteze în plasmelor de echilibru rămâne Maxwelliană. Starea de echilibru în care funcția de distribuție este Maxwelliană poate apărea şi în prezenta unui câmp constant, când viteza fluidului este zero ($u = 0$). Evident în acest caz plasma nu poate fi considerata omogenă. Ecuația cinetică pentru o funcție de distribuție staționară $\partial(nf)/\partial t = 0$, ia forma:

$$\mathbf{v} grad(nf) + \left(\frac{\mathbf{F}}{m}\right) grad_v(nf) = \frac{\delta(nf)}{\delta t} \qquad 4.16$$

pentru orice fel de particule. Dacă presupunem că funcția de distribuție este dată de ecuația 4.8 pentru cazul când $\mathbf{u} = 0$:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} exp\left(\frac{-mv^2}{2T}\right) \qquad 4.17$$

şi egalând termenul de ciocnire cu zero, obţinem în final dependenţa concentraţiei de coordonate:

$$n = n_0 exp\left(-\frac{-U(\mathbf{r})}{T}\right) \qquad 4.18$$

unde n_0 este concentraţia în punctul $U = 0$. Aceasta este cunoscută sub numele de ecuaţia Boltzmann şi distribuţia *nf* care este determinată de ecuaţiile 4.17 şi 4.18 se numeşte ***distribuţie Maxwell-Boltzmann.***

4.2. Funcţia de distribuţie a particulelor încărcate în câmp electric.

Sub influenţa forţelor externe funcţiile de distribuţie ale particulelor deviază de la starea de echilibru. În asemenea cazuri nu numai funcţiile de distribuţie se modifică ci şi forma lor. Efectul forţelor externe asupra funcţiei de distribuţie este diferit pentru specii diferite. Astfel, în câmpuri electrice particulele încărcate pot fi accelerate ceea ce duce la modificarea energiei. În câmpuri magnetice particulele încărcate îşi modifică traiectoria. Numai particulele neutre rămân neafectate de prezenţa câmpurilor electrice şi magnetice. După cum se ştie particulele neutre sunt în permanent contact cu pereţii descărcărilor de aceea energia medie a particulelor neutre este mult mai mica decât a particulelor încărcate şi foarte aproape de echilibru. Ne propunem să determinăm condiţiile în care un câmp electric modifică semnificativ funcţia de distribuţie a

particulelor încărcate aflate într-o plasmă slab ionizată. Accelerând particulele încărcate în câmpuri electrice, acestea acumulează o viteză adițională în timpul τ dintre două ciocniri:

$$\Delta \mathbf{v}_E \approx \frac{e\mathbf{E}}{m}\tau \approx \frac{e\mathbf{E}}{m\nu}. \qquad 4.19$$

Energia cinetică corespunzătoare este egală cu

$$\Delta K_E = \frac{m(\mathbf{v}+\Delta \mathbf{v}_E)^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = m\mathbf{v}\Delta \mathbf{v}_E + \frac{m(\Delta \mathbf{v}_E)^2}{2}$$

sau după mediere, devine ($\langle \mathbf{v} \rangle = 0$),

$$\langle \Delta K_E \rangle = \left\langle \frac{m(\Delta \mathbf{v}_E)^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{e^2E^2}{2} m\nu^2 \right\rangle. \qquad 4.20$$

În acelaşi timp pierderile de energie ale particulelor încărcate în ciocnirile cu particulele neutre sunt proporționale cu diferența dintre energiile lor

$$\Delta K_\nu = \kappa(K - K_a). \qquad 4.21$$

În plasmele slab ionizate aceste pierderi devin dominante. Într-o stare staționară energia medie luată de la câmp trebuie să devină egală cu pierderile de energie în procesele ciocnire $\langle \Delta K_E \rangle = \langle \Delta K_\nu \rangle$. În acest caz bilanțul energetic este determinat de diferența dintre energiile medii ale particulelor încărcate şi ale celor neutre:

$$\langle K - K_a \rangle \approx \frac{e^2E^2}{m\kappa\nu^2} \qquad 4.22$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde mărimile ν şi κ sunt valorile medii ale frecvenţei de ciocnire şi coeficientului de transfer al energiei. Folosind relaţia 4.4 se obţine condiţia pentru un câmp electric al cărui efect este foarte mic asupra energiei cinetice medii $\langle K - K_a \rangle << \langle K \rangle \approx T$ sau

$$E << E_p = \frac{\nu}{e}\sqrt{\kappa m T} = \frac{\sqrt{\kappa}T}{e\lambda} \qquad 4.23$$

unde $\lambda \approx v_T / \nu \approx (1/\nu)(\sqrt{T/m})$ este drumul liber mediu. Dacă $E \geq E_p$, atunci energia medie a particulelor încărcate este mai mare decât cea a particulelor neutre. Pentru orice energie mai mare decât energia medie a particulelor încărcate $E \geq E_p$, viteza medie este:

$$v_T = \sqrt{2\langle K \rangle / m} \approx \frac{(1/\sqrt{\kappa})eE}{m\nu} \qquad 4.24$$

unde viteza de drift u_E este aproximativ egală cu viteza medie corespunzătoare timpului dintre două ciocniri,

$$u_E = (\Delta v_E) \approx \frac{eE}{m\nu} = v_T\sqrt{\kappa}\,. \qquad 4.25$$

Pentru ioni, coeficientul de transfer al energiei în cazul ciocnirii elastice are valoarea aproape de unitate $(\kappa \approx m_i / m_a \approx 1)$. Aici condiţia 4.5 devine $E << E_{pi} \approx T_i / e\lambda_{ia}$ sau sub forma numerică este $E(V/cm) << 10^2 T_i(eV)p(mmHg)$.

Pentru electroni, coeficientul de transfer al energiei este mult mai mic decât unitatea: în cazul ciocnirilor elastice fiind $\kappa \approx 2m_e / m_a$. De aceea, efectul unui câmp electric slab asupra funcţiei de distribuţie este mult mai riguros

pentru ioni $E << E_{pe} = \sqrt{\kappa_{ea}} T / e\lambda_{ea}$. Valoarea vitezei de drift dată de relația 4.25 este de asemenea foarte mică, electronii schimbându-şi brusc direcția la fiecare ciocnire. În plasmele ionizate, când se ia în considerare bilanțul energiei electronilor trebuie ținut cont de ciocnirile lor cu particulele neutre şi cu ionii.

4.3. Metode de rezolvare a ecuației cinetice.

Când deviația funcției de distribuție de la echilibru este mică, soluția ecuației cinetice poate fi găsită folosind metoda aproximațiilor succesive. În acest caz funcția de distribuție se poate scrie ca o serie de puteri ai parametrilor care determină deviația de la echilibru:

$$f = f_{(0)} + f_{(1)} + f_{(2)} + ... \qquad 4.26$$

Primul termen al seriei de mai sus este ***distribuția Maxwelliană***, cel de-al doilea termen include o combinație ***liniară a parametrilor***, al treilea este o ***combinație pătratică*** ş.a.m.d.

Considerăm cazul unui câmp electric omogen **E** care este sursa unui dezechilibru, acest câmp fiind orientat în direcția axei *Oz*. Funcția de distribuție a electronilor depinde de viteza **v** şi de unghiul Θ dintre direcția vitezei **v** şi câmpul electric **E**. Presupunem că dependența de unghiului Θ este mică, astfel încât să o putem exprima cu ajutorul polinoamelor ortogonale Legendre $P_n(\cos\Theta)$:

$$f(v) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(v) P_n(\cos\Theta) \qquad 4.27$$

BCU INSCENTA UNIVERSITY LIBRARY

unde $f_n(v)$ depinde numai de viteză. Înlocuind relația 4.27 în ecuația cinetică se va găsi un sistem de ecuații cuplate pentru funcțiile $f_n(v)$. Fiecare termen se obține înmulțind ecuația cinetică cu unul din polinoamele $P_n(\cos\Theta)$ integrând apoi după toate valorile lui $\cos\Theta$. Primii termeni din suma 4.27 conțin polinoamele $P_0 = 1$ si $P_1 = \cos\Theta$. În aceste condiții funcția de distribuție se scrie:

$$f(\mathbf{v}) = f_0(v) + \cos\Theta f_1(v) = f_0(v) + \frac{v_z}{v} f_1(v) \qquad 4.28$$

Se poate observa că funcția $f_0(v)$ defineşte energia medie a electronilor şi valoarea medie a oricărei cantități care depinde de energie. Într-adevăr media lui $g(v)$ este:

$$\begin{aligned} \langle g(v) \rangle &= \int_{(v)} g(v) f(v) d^3v = \\ &= \iiint g(v) [f_0(v) + f_1(v)\cos\Theta] v^2 \sin\Theta dv d\Theta d\varphi \qquad 4.29 \\ &= 4\pi \int_0^\infty g(v) f(v) v^2 dv \end{aligned}$$

unde v, Θ, φ sunt coordonatele sferice. Din ecuația 4.29 putem vedea relația dintre funcțiile f_0 si f_k,

$$f_v(v) = 4\pi v^2 f_0(v)$$

$$f_K(K) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{m^{3/2}} \sqrt{K} f_0\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}\right).$$

Aceasta relație determină condiția de normare

$$\int_0^\infty 4\pi v^2 f_0(v)dv = 1. \qquad 4.30$$

Similar se poate găsi viteza medie a electronilor care este dată de funcția $f_1(v)$. Pentru componenta vitezei paralelă cu vectorul câmp electric, obținem:

$$u_E = \langle v\cos\Theta \rangle = \iiint v\cos\Theta \left[f_0(v) + f_1(v)\cos\Theta \right] v^2 \sin\Theta dv d\Theta d\varphi$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty v^3 f_1(v)dv \qquad 4.31$$

Funcția $f_0(v)$ se numeşte ***componenta izotropă*** şi funcția $f_1(v)$ este denumită ***componenta de drift a funcției de distribuție***. Pentru a obține funcțiile f_0 şi f_1 trebuie să înlocuim ecuația 4.28 în ecuația cinetică. Pentru o plasmă omogenă aflată într-un câmp electric omogen, ecuația cinetică 3.16 se scrie:

$$\frac{\partial(nf)}{\partial t} - \frac{en}{m}\mathbf{E}\,grad_v(nf) = \frac{\partial(nf)}{\partial t}. \qquad 4.32$$

Înlocuind ecuația 4.28, transformăm derivata $\delta f / \delta v_z$ care apare în cel de-al doilea termen al ecuației:

$$\frac{\partial f}{\partial v_z} = \frac{\partial}{\partial v_z}\left[f_0(v) + f_1(v)\frac{v_z}{v} \right] = \frac{v_z}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{f_1}{v} + \frac{v_z^2}{v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f_1}{v}\right) =$$

$$\cos\Theta\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{f_1}{v} + \cos^2\Theta v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f_1}{v}\right)$$

atunci,

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial(nf_0)}{\partial t}+\cos\Theta\frac{\partial(nf_1)}{\partial t}-$$
$$-\frac{enE}{m}\left[\frac{f_1}{v}+\cos\Theta\frac{\partial f_0}{\partial v}+\cos^2\Theta v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f_1}{v}\right)\right]=\frac{\delta(nf)}{\delta t}. \quad 4.33$$

Din ecuația de mai sus este uşor să obținem ecuațiile pentru funcțiile f_0 şi f_1. Prima ecuație se obține înmulțind ecuația 4.33 cu $d(\cos\Theta)$ şi integrând termenul pe toate valorile lui $\cos\Theta$. Ca rezultat al integrării, termenii proporționali cu $\cos\Theta$ dispar din ecuația 4.15, şi ecuațiile se scriu:

$$\frac{\partial(nf_0)}{\partial t}-\frac{enE}{m_e}\left[\frac{f_1}{v}+\frac{1}{3}v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f_1}{v}\right)\right]=S_0$$

sau

$$\frac{\partial(nf_0)}{\partial t}-\frac{enE}{3m_e v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 f_1)=S_0 \quad 4.34$$

unde se introduce notația următoare:

$$S_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\delta(nf)}{\delta t}d(\cos\Theta). \quad 4.35$$

Cea de-a doua ecuație este obținută înmulțind ecuația 4.33 cu $\cos\Theta d(\cos\Theta)$ şi integrând iarăşi pe toate valorile lui $\cos\Theta$. În acest caz termenii independenți de Θ şi proporționali cu $\cos^2\Theta$ dispar. Atunci:

$$\frac{\partial(nf_1)}{\partial t}-\frac{enE}{m_e}\frac{\partial f_0}{\partial t}=S_1 \quad 4.36$$

unde

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$S_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\delta(nf)}{\delta t} \cos\Theta d(\cos\Theta). \qquad 4.37$$

Soluțiile ecuațiilor 4.34 si 4.36 fac posibilă găsirea componentelor funcțiilor de distribuție $f_0(v)$ şi $f_1(v)$.

O metoda similară pentru obținerea funcției de distribuție a electronilor în cazul general se poate folosi şi când acționează câmpuri electrice şi magnetice care fac ca plasma să fie neomogenă. Atunci funcția de distribuție depinde de toate componentele vitezei. În cazul unei anizotropii slabe, ecuația 4.28 va conține suma dintre o componentă izotropă şi trei componente $f_{1k}(v)$, ceea ce va defini componentele vitezei medii a electronilor:

$$f(\mathbf{v}) = f_0(v) + \frac{v_x}{v} f_{1x}(v) + \frac{v_y}{v} f_{1y}(v) + \frac{v_z}{v} f_{1z}(v) = \qquad 4.38$$

$$= f_0(v) + \frac{\mathbf{v}}{v}\mathbf{f}_1(v)$$

unde s-a introdus vectorul funcției $\mathbf{f}_1(v)$ cu componentele f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}. Făcând uz de reprezentarea de mai sus, obținem:

$$u_k = \int_{\mathbf{v}} v_k f(\mathbf{v}) d^3v = \int_v \left[v_k f_0(v) + \sum_l \frac{v_k v_l}{v} f_u(v) \right] v^2 dv d\omega$$

unde am introdus coordonatele sferice $(d\omega = \sin\Theta d\Theta d\varphi)$. Prin integrarea după toate unghiurile suma păstrează numai termenul proporțional cu $(v_k^2/v)f_{1k}$ şi ceilalți termeni dispar. Atunci obținem:

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$u_k = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty v^3 f_{1k}(v)dv. \qquad 4.39$$

Înlocuind relația 4.38 în ecuația cinetică 3.16 vom găsi ca şi mai sus ecuații asociate cu funcțiile $f_0(v)$ şi f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}. Prima ecuație este obținută mediind ecuația cinetică peste toate vitezele (integrând în unghiul solid) şi celelalte trei ecuații se obțin mediind după ce înmulțim cu cosinusurile unghiurilor dintre vectorul viteză şi axele de coordonate. Ecuațiile care rezultă sunt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(nf_0)}{\partial t} + \frac{v}{3}div(nf_1) - \frac{en}{3m_e v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 E f_1) = S_0 \\
&\frac{\partial(nf_1)}{\partial t} + vgrad(nf_0) - \frac{en}{m_e}E\frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{en}{m_e c}[H \times f_1] = S_1
\end{aligned} \qquad 4.40$$

Termenii de ciocnire S_0 şi S_1 din ecuația 4.40 se obțin din egalitățile

$$\begin{aligned}
S_0 &= \frac{1}{4\pi}\int_{(\omega)}\frac{\delta(nf)}{\delta t}d\omega \\
S_{1k} &= \frac{3}{4\pi}\int_{(\omega)}\frac{\delta(nf)}{\delta t}\cos\Theta_k d\omega
\end{aligned} \qquad 4.41$$

unde Θ_k este unghiul dintre axele k şi vectorul viteză, iar integrarea este făcută după unghiurile solide care acoperă direcțiile vitezelor.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4.4. Efectul ciocnirilor elastice electron – atom asupra funcției de distribuție a electronilor în câmp electric.

În condiții staționare (când funcția de distribuție este un invariant temporal) ecuațiile componentelor funcțiilor de distribuție într-un câmp electric constant au forma:

$$-\frac{eEn}{3m_e v^2}\frac{d}{dv}(v^2 f_1)=S_0\,; \quad -\frac{eEn}{m_e}\frac{df_0}{dv}=S_1. \qquad 4.42$$

Termenii de ciocnire S reprezintă suma termenilor de ciocnire a electronilor cu atomii, cu electronii şi cu ionii: $S_n = S_{na} + S_{ni} + S_{ne}$. Pentru a estima componentele $S_{0\beta}$ şi $S_{1\beta}$ vom folosi egalitățile:

$$S_{1\beta} \approx \nu_{e\beta} n f_1\,;\; S_{0\beta} \approx \kappa_{e\beta}\nu_{e\beta} n f_0 \qquad 4.43$$

unde prima relație caracterizează modificarea direcției vitezei electronilor în timpul ciocnirii şi depinde de frecvența de ciocnire, iar ultima relație caracterizează modificarea vitezei şi este determinată de produsul dintre frecvența de ciocnire şi coeficientul de transfer al energiei. Soluțiile ecuațiilor 4.42 sunt valabile pentru o plasmă cu grad de ionizare foarte mic în care numai ciocnirile *electron-atom* sunt importante, iar efectul ciocnirilor *electron-electron* şi *electron-ion* asupra funcției de distribuție este neglijabil, astfel încât putem scrie:

$$\begin{aligned} \nu_{ee} &\approx \nu_{ei} << \nu_{ea} \\ \nu_{ee} &<< \kappa_{ea}\nu_{ea} \end{aligned} \qquad 4.44$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(ținând cont de faptul că $\kappa_{ei} = \kappa_{ea}$ deoarece $m_i = m_a$ și $\kappa_{ee} \approx 1$). Cea de-a doua inegalitate este mult mai riguroasă decât prima, iar pentru ciocniri elastice ia forma $\nu_{ee} << (m_e / m_a)\nu_{ea}$, sau

$$\eta = \frac{n_e}{n_a} << \frac{m_e}{m_a}\frac{s_{ea}}{s_{ee}} . \qquad 4.45$$

Efectul ciocnirilor *electron-electron* asupra funcției de distribuție se poate neglija numai pentru valori mici ale parametrului η ($\eta \le m_e / m_a$). Pentru început căutam soluțiile ecuației 4.42 în cazul în care ciocnirile *electron-atom* sunt importante, atunci conform [3,4] termenii de ciocnire S_0 și S_1 folosind relația 4.42 se scriu:

$$\frac{eEn}{n_e}\frac{df_0}{dv} = n\nu^t f_1 \qquad 4.46$$

$$-\frac{eEn}{3m_e v^2}\frac{d}{dv}(v^2 f_1) = \frac{1}{2}\frac{n}{v^2}\frac{d}{dv}\left[\kappa\nu^t v^2\left(vf_0 + \frac{T_a}{m_e}\frac{df_0}{dv}\right)\right] . \qquad 4.47$$

Ecuația 4.46 descrie legătura dintre viteza de drift sub acțiunea câmpului electric și pierderile de energie în procesul de ciocnire. Această ecuație ne permite să găsim o relație între funcțiile f_1 și f_0:

$$f_1 = \frac{eE}{m_e\nu^t}\frac{df_0}{dv} . \qquad 4.48$$

Folosind ecuația 4.48 și din ecuația 4.31 obținem (integrare prin părți) expresia generală pentru viteza de drift sub acțiunea câmpului electric:

$$u_E = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty f_1(v)v^3 dv = \frac{4\pi}{e}\frac{eE}{m_e}\int_0^\infty \frac{v^3}{\nu^t}\frac{df_0}{dv}dv$$
$$= -\frac{4\pi}{3}\frac{eE}{m_e}\int_0^\infty f_0(v)\frac{d}{dv}\left(\frac{v^3}{\nu^t}\right)dv \qquad 4.49$$

Dacă frecvența de ciocnire este independentă de viteză, expresia 4.49 conduce la o ecuație care nu depinde de forma lui $f_0(v)$:

$$u = -\frac{eE}{m_e\nu^t}4\pi\int_0^\infty f_0(v)v^2 dv = -\frac{eE}{m_e\nu^t}.$$

Ecuația componentei izotrope a funcției de distribuție se găseşte înlocuind ecuația 4.48 în ecuația 4.47:

$$-\frac{n}{v^2}\frac{d}{dv}\left(\frac{e^2E^2v^2}{3m_e^2\nu^t}\frac{df_0}{dv}\right) = \frac{1}{2}\frac{n}{v^2}\frac{d}{dv}\left[K\nu^t v^2\left(vf_0 + \frac{T_a}{m_e}\frac{df_0}{dv}\right)\right]. \qquad 4.50$$

Partea stângă a ecuației de mai sus ne arată că viteza electronilor creşte sub acțiunea câmpului electric iar partea dreaptă poate fi reprezentată ca divergența fluxului de particule din spațiul vitezelor. Fluxul

$$\Gamma_{vE} = -n\frac{e^2E^2v^2}{3m_e^2\nu^t}\frac{df_0}{dv} = -D_{En}\frac{df_0}{dv} \qquad 4.51$$

este proporțional cu derivata df_0/dv, şi deoarece $f_0(v)$ este o funcție descrescătoare fluxul este direcționat spre viteze mari. Energia pe care electronii o câştigă de la câmpul electric este acumulată între perioadele dintre ciocniri. Modificarea vectorului viteză al electronului în

BCU TIMIŞOARA CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

timpul dintre două ciocniri pentru un electron aflat în câmp electric este:

$$\Delta v_E = v^* - v = -\left(\frac{eE}{m_e}\right)\tau = -\frac{eE}{m_e \nu}.$$

Modificarea Δv a vitezei este dată de relațiile

$$v^{*2} \approx v^2 + 2v\Delta v_E$$

$$\Delta v = v^* - v \approx \frac{v\Delta v_E}{v}$$

în care se ține seama de faptul că $\Delta v_E << v$. Deoarece viteza v poate fi arbitrară, valoarea medie a lui Δv se reduce la zero. Valoarea arbitrară a lui $(\Delta v)^2$ este egală cu:

$$\left\langle (\Delta v)^2 \right\rangle = \frac{1}{3}(\Delta v)^2 = \frac{1}{3}\frac{e^2E^2}{m_e^2\nu^2}$$

unde coeficientul de difuzie este [3-5]:

$$D_E = \frac{\left\langle (\Delta v)^2 \right\rangle}{2\tau} = \frac{1}{6}\frac{e^2E^2}{m_e^2\nu} \qquad 4.52$$

şi are acelaşi ordin de mărime ca şi relația 4.51.
Continuând cu ecuația 4.50 se găseşte că divergența densității fluxului de particule din spațiul vitezelor – care determină energia acumulată de la câmpul electric Γ_{vE} (ec. 4.51) şi fluxul care determină pierderile de energie prin procesul de ciocnire Γ_{vv} [3,4], se reduce la zero:

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{1}{v^2}\frac{d}{dv}\left[v^2(\Gamma_{vE}+\Gamma_{vv})\right]=0. \qquad 4.53$$

Integrând această ecuație, ajungem la o constantă a sumei fluxului pe o suprafață din spațiul vitezelor, $4\pi v^2(\Gamma_{vE}+\Gamma_{vv})=C$.

Deoarece cantitățile Γ_E și Γ_v sunt finite când $v\to 0$, atunci și constanta de integrare este zero. Aceasta înseamnă că suma fluxului este zero. Folosind expresiile componentelor Γ_{vE} și Γ_{vv} se obține ecuația pentru f_0:

$$\frac{2}{3}\frac{e^2E^2}{m_e^2(\nu_{ea}^t)^2}\frac{df_0}{dv}+\kappa_{ea}\left(vf_0+\frac{T_a}{m_e}\frac{df_0}{dv}\right)=0. \qquad 4.54$$

Soluția ecuației 4.54 are forma:

$$f_0=A\exp\left[-\int_0^{\infty}\frac{m_e v dv}{T_a+2e^2E^2/3\kappa_{ea}(\nu_{ea}^t)^2 m_e}\right] \qquad 4.55$$

unde constanta A se poate găsi din condiția de normare $4\pi\int_0^{\infty}f_0v^2dv=1$.

Se poate observa că deviațiile funcției de distribuție de la echilibru sunt date de raportul intensității câmpului electric E la valoarea sa critică (ecuația 4.23) $E_p=\nu_{ea}\sqrt{\kappa_{ea}m_eT_a/e}$. Pentru $E\ll E_p$ cel de-al doilea termen de la numitorul integrantului ecuației 4.55 este mic, și distribuția pe viteze devine Maxwelliană cu temperatura T_a. În câmpuri electrice mari pentru $E\gg E_p$ primul termen de la numitor poate fi neglijat și ecuația 4.55 ia forma:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$f_0(v) = A\exp\left[-\frac{3}{2}\frac{m_e^2\kappa_{ea}}{e^2E^2}\int_0^v \nu(\nu'_{ea})^2 dv\right]. \quad 4.56$$

Expresiile 4.55 şi 4.56 arată că forma funcţiei de distribuţie este determinată de dependenţa frecvenţei de ciocnire în funcţie de viteza $\nu'_{ea}(v)$. Pentru o frecvenţă de ciocnire constantă funcţia de distribuţie devine Maxweliană. Din ecuaţia 4.55 găsim că:

$$f_0 = A\exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right) = \left(\frac{m_e}{2\pi T_e}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right) \quad 4.57$$

sau

$$T_e = T_a + \frac{2}{3}\frac{e^2E^2}{\kappa_{ea}m_e(\nu'_{ea})^2} = T_a + \frac{1}{3}\frac{m_a e^2E^2}{m_e^2(\nu'_{ea})^2}. \quad 4.58$$

Se poate arăta că temperatura electronilor care caracterizează energia medie a electronilor depăşeşte temperatura atomilor şi pentru valori $E >> E_p$ este direct proporţională cu pătratul intensităţii câmpului electric.

Dacă ν_{ea} este o funcţie de viteză, funcţia de distribuţie poate fi non Maxweliană. Pentru o secţiune de ciocnire constantă, şi când $\nu'_{ea} = n_a v s'_{ea} = v/\lambda'_{ea}$ este proporţională cu viteza, funcţia de distribuţie în câmp electric intens (ecuaţia 4.56) devine:

$$f_0 = A\exp\left[-\frac{3}{8}\frac{m_e^2v^4\kappa_{ea}}{e^2E^2\lambda_{ea}^2}\right] \quad 4.59$$

unde din condiţia de normare constanta A are valoarea

$$A = \frac{0.37}{\pi}\left(\frac{m_e\sqrt{\kappa_{ea}}}{e\lambda_{ea}E}\right)^{3/2}.$$

Cu ajutorul ecuației 4.29 găsim energia medie a electronilor pentru aceasta distribuție:

$$\langle K_e \rangle = \frac{0.57 e E \lambda'_{ea}}{\sqrt{\kappa_{ea}}} = 0.4 \sqrt{m_e / m_a}\, e E \lambda'_{ea}. \qquad 4.60$$

Viteza de drift în câmp electric poate fi găsită înlocuind ecuația 4.59 în ecuația 4.49 şi prin integrare se obține:

$$u_E = 0.69 \kappa_{ea}^{1/4} \left(\frac{e E \lambda'_{ea}}{m_e} \right)^{1/2}. \qquad 4.61$$

Distribuția descrisă de ecuația 4.59 se numeşte ***distribuție Druyvestein*** şi este caracterizată de o dependență de viteză mult mai puternică decât cea Maxwelliană. O comparație între distribuțiile Maxwelliană si Druyvestein este arătată în figura de mai jos.

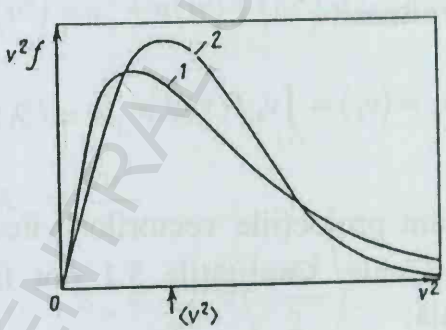

Figura 4.1.
Comparație între funcțiile de distribuție Maxwell(1) şi Druvestyein (2) [3].

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5. Momentele ecuației Boltzmann

5.1. Ecuațiile momentelor funcției de distribuție.

În anumite condiții ecuațiile cinetice fac posibilă găsirea funcției de distribuție şi obținerea caracteristicilor macroscopice ale plasmei. Având în vedere complexitatea ecuațiilor cinetice găsirea soluțiilor complete nu este posibilă. De cele mai multe ori se folosesc ecuații aproximative ale momentelor funcției de distribuție care sunt derivate din ecuațiile cinetice. Momentele funcției de distribuție sunt combinații ale componentelor vitezei mediate; ele pot fi liniare (primul moment), pătratice (al doilea moment) şi aşa mai departe [3-5].
Primul ordin reprezintă valorile mediate pe componentele vitezei:

$$u_k = \langle v_k \rangle = \int_{(v)} v_k f(\mathbf{v}) d^3 v \qquad 5.1$$

unde u_k şi v_k sunt proiecțiile vectorilor viteze **u** şi **v** pe axele de coordonate. Cantitățile 5.1 pot fi scrise sub forma vectorială:

$$u = \int_{(v)} \mathbf{v} f(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} .$$

Viteza totală a fiecărei particule poate fi reprezentată sub forma următoare

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \qquad 5.2$$

unde **u** este viteza elementului de masă (viteza medie) şi w este viteza de agitaţie termică. Media vitezei de agitaţie termică este egală cu zero:

$$\langle \mathbf{w} \rangle = \int_{(v)} \mathbf{w} f(\mathbf{v}) d^3 v = 0 . \qquad 5.3$$

Al doilea moment al ecuaţiei Boltzmann poate fi obţinut din valorile mediate ale produsului componentelor vitezei $\langle v_k v_l \rangle$. Deoarece permutarea indicilor nu afectează produsul putem găsi şase momente de acest tip. Energia medie a particulelor este următoarea:

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \int_{(v)} \frac{mv^2}{2} f(\mathbf{v}) d^3 v \qquad 5.4$$

$$\langle v^2 \rangle = u^2 + \mathbf{u}\langle \mathbf{w} \rangle + \langle w^2 \rangle = u^2 + \langle w^2 \rangle$$

$$\langle K \rangle = K_u + K_w$$

$$K_u = \frac{mu^2}{2} \qquad 5.5$$

$$K_w = \frac{3}{2} T = \left\langle \frac{mw^2}{2} \right\rangle .$$

Temperatura T este introdusă aici ca o măsură a energiei medii a mişcării dezordonate. Stabilim acum care sunt componentele densităţii fluxului care traversează unitatea de arie F în direcţia l, vezi figura 5.1. Numărul particulelor care au viteza cuprinsă în intervalul v*d*v şi care traversează aria F în unitatea de timp este egal cu $nf \cdot v \cdot l \cdot d^3 v$. Deoarece componenta k a

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

impulsului transferat fiecărei particule este mv_k, atunci impulsul transferat unei particule izolate de către toate celelalte particule este $mv_k nfv_l d^3\mathbf{v}$, iar valoarea medie a impulsului are următoarea forma:

$$P_{kl} = nm\int v_k v_l f d^3v = nm\langle v_k v_l \rangle . \qquad 5.6$$

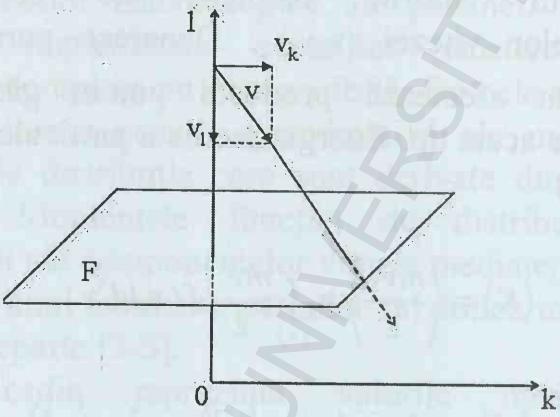

Figura 5.1.
Impulsul transmis pe unitatea de suprafață [3].

Valorile lui P_{kl} determină tensorul densității momentului fluxului densitate $\breve{\mathbf{P}}$. În sistemul de referință unde viteza medie a particulelor $\mathbf{u} = 0$ această cantitate se numeşte ***tensorul presiune*** $\breve{\mathbf{p}}$. Folosind viteza totală a particulei, din relația 5.6. se obține:

$$P_{kl} = nm\langle (w_k + u_k)(w_l + u_l)\rangle =$$
$$nmu_k u_l + nm\langle w_k w_l \rangle + nmu_k \langle w_l \rangle + nm\langle w_k \rangle u_l .$$

Ultimii termeni sunt egali cu zero conform egalității 5.3 şi obținem

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$P_{kl} = nmu_k u_l + p_{kl} \qquad 5.7$$

unde

$$p_{kl} = nm\langle w_k w_l \rangle . \qquad 5.8$$

Termenii diagonali ai tensorului $\tilde{\mathbf{p}}$ descriu forțele de presiune care acționează normal pe ariile perpendiculare pe axelor de coordonate (de exemplu, p_{xx} este presiunea normală pe un element de suprafață al planului yz). Componentele nediagonale descriu forțele tangente la aceste suprafețe.
Dacă funcția de distribuție a vitezelor dezordonate este izotropă următoarele relații îşi păstrează valabilitatea:

$$\langle w_x^2 \rangle = \langle w_y^2 \rangle = \langle w_z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle w^2 \rangle$$
$$\langle w_x w_y \rangle = \langle w_x w_z \rangle = \langle w_y w_z \rangle = 0 .$$

Tensorul presiune este un produs scalar $p_{kl} = p\delta_{kl}$, presiunea scalară fiind determinată de energia medie a mişcării dezordonate,

$$p = \frac{1}{3} nm\langle w^2 \rangle = nT . \qquad 5.9$$

În general, tensorul de presiune este împărțit în doi termeni: ***presiunea scalară normală*** p , care este definită de ecuația 6.9 şi aşa-numitul ***tensor de viscozitate*** $\hat{\pi}$:

$$p_{kl} = p\delta_{kl} + \pi_{kl} \qquad 5.10$$

unde

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\pi_{kl} = nm\left\langle w_k w_l - \frac{1}{3} w^2 \delta_{kl} \right\rangle \qquad 5.11$$

care reprezintă o parte a tensorului $\tilde{\mathbf{p}}$.

După cum se vede din ecuația 5.11, elementele diagonale ale tensorului $\hat{\pi}$ sunt date de ecuația $\sum_k \pi_{kk} = 0$, tensorul având cinci componente independente.

Momentele ***celui de-al treilea ordin*** conțin medierea produsului celor trei componente ale vitezelor $\langle v_k v_l v_m \rangle$. În acest caz avem 10 momente independente. Cele mai importante sunt acele momente asociate cu fluxul de energie. Fluxul de energie transportat în direcția k de către particulele cu viteze din domeniul $\mathbf{v}d\mathbf{v}$ este egal cu $(mv^2/2)v_k n f d^3 v$; iar fluxul transportat de toate particulele se obține integrând următoarea expresie:

$$Q_k = \int_{(v)} \frac{1}{2} m v^2 v_k f d^3 v = \frac{1}{2} nm \langle v_k v^2 \rangle \qquad 5.12$$

sau scrisă sub formă vectorială devine $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} nm \langle \mathbf{v} v^2 \rangle$.

Dacă reprezentăm vitezele ca o sumă a componentei de drift şi a componentei arbitrare ca în ecuația 5.2 şi dacă ținem cont că $\langle \mathbf{w} \rangle = 0$ găsim componenta k,

$$Q_k = \frac{nm}{2} \langle (u_k + w_k)(\mathbf{u} + \mathbf{w})^2 \rangle =$$

$$= \frac{nm}{2} (u_k u^2 + u_k \langle w^2 \rangle + 2 \sum_l u_l (w_l w_k) + \langle w_k w^2 \rangle)$$

Folosind ecuațiile 5.5 şi 5.8 această egalitate poate fi scrisă în felul următor

$$Q_k = q_k + nK_u u_k + nK_w u_k + \sum_l p_{kl} u_k$$

sau reprezentată sub formă vectorială, devine

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + nK_u \mathbf{u} + nK_w \mathbf{u} + \breve{\mathbf{p}}\mathbf{u} . \qquad 5.13$$

Aici primul termen

$$\mathbf{q} = \frac{nm}{2}\left\langle \mathbf{w} w^2 \right\rangle \qquad 5.14$$

reprezintă transferul de energie într-un sistem unde viteza medie este zero, adică transferul de energie asociat cu mişcarea dezordonată a particulelor. Vectorul $\mathbf{q}$ este numit ***densitatea fluxului de energie (căldura)***. Ceilalţi termeni ai ecuaţiei 5.13 descriu fluxul asociat cu mişcarea de drift, adică ***transferul de energie al mişcării de drift*** nK_u , ***al energiei termice*** nK_w şi ***energia determinată de lucrul mecanic al forţelor de presiune.***

5.2. Derivarea momentelor ecuaţiilor.

Ecuaţiile momentelor funcţiei de distribuţie se obţin din ecuaţia cinetică. Pentru obţinerea lor trebuie să înmulţim ecuaţia cinetică cu combinaţiile proiecţiilor vitezelor la un moment dat şi apoi să integrăm termen cu termen pe spaţiul vitezelor.

Momentul zero al ecuaţiei defineşte ecuaţia concentraţiei obţinută prin integrarea termen cu termen a ecuaţiei cinetice,

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial(nf)}{\partial t}-\mathbf{v}grad(nf)+\frac{Ze}{m}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\right\}grad_v(nf)=\frac{\delta(nf)}{\delta t}. \quad 5.15$$

Notam cu g combinațiile proiecțiilor vitezei. Momentul funcției de distribuție care corespunde acestei combinații este $\langle g\rangle=\int gf(\mathbf{v})d^3v$. Ecuația pentru g se obține înmulțind ecuația 5.15 cu g şi apoi integrăm pe spațiul vitezelor,

$$\int_{(v)} g\frac{\partial(nf)}{\partial t}d^3\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial t}\left(n\int_{(v)}gfd^3\mathbf{v}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(n\langle g\rangle). \quad 5.16$$

Deoarece coordonatele x_k şi componentelor vitezei v_k sunt independente putem să transformam cel de-al doilea termen astfel:

$$\int_{(v)} g[\mathbf{v}grad(nf)]d^3\mathbf{v}=\sum_k gv_k\frac{\partial(nf)}{\partial x_k}d^3\mathbf{v}$$
$$=\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left[n\int_{(v)}gv_kfd^3\mathbf{v}\right]=div(n\langle\mathbf{v}g\rangle) \quad 5.17$$

Termenul proporțional cu câmpul electric se obține în felul următor:

$$\int_{(v)} g\frac{Ze}{m}\mathbf{E}grad_v(nf)d^3\mathbf{v}=\frac{Zen}{m}\int_{(v)}g\sum_k E_k\frac{\partial f}{\partial v_k}d^3\mathbf{v}=$$
$$=-\frac{Zen}{m}\sum_k E_k\int_{(v)}\frac{\partial g}{\partial v_k}fd^3\mathbf{v}=-\frac{Ze}{m}n\mathbf{E}\langle grad_v g\rangle \quad 5.18$$

Când integrăm trebuie să ținem cont că funcția de distribuție se anulează pentru $v_k\to\pm\infty$. În mod similar,

integrând prin părți termenul proporțional cu câmpul magnetic devine:

$$\frac{Ze}{mc}\oint_{(v)}\{[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]grad_v(nf)\}gd^3\mathbf{v}=\frac{Zen}{mc}\sum_k\int_{(v)}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]_k\frac{\partial f}{\partial v_k}gd^3\mathbf{v}=$$
$$-\frac{Zen}{mc}\sum_k\int_{(v)}\left\{[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]_k\frac{\partial g}{\partial v_k}+g\frac{\partial}{\partial v_k}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]_k\right\}fd^3\mathbf{v}$$

Termenul al doilea din integrand este egal cu zero deoarece $[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]_k$ depinde numai de componentele vitezelor care sunt perpendiculare pe $\mathbf{v}_k$. Atunci găsim că,

$$\frac{Ze}{mc}\int_{(v)}\{[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]grad_v(nf)\}gd^3\mathbf{v}=$$
$$=-\frac{Zen}{mc}\sum_k\langle\mathbf{v}\times\mathbf{H}\rangle_k\frac{\partial g}{\partial v_k}=-\frac{Zen}{mc}\langle[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]grad_v g\rangle \qquad 5.19$$

Ținând cont de ecuațiile 5.16-5.19 ecuația pentru $\langle g\rangle$ poate fi scrisă:

$$\frac{\partial(n\langle g\rangle)}{\partial t}+div(n\langle g\mathbf{v}\rangle)-\frac{Zen}{m}\mathbf{E}\langle grad_v g\rangle$$
$$-\frac{Zen}{mc}\langle[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]grad_v g\rangle=\frac{\delta(n\langle g\rangle)}{\delta t} \qquad 5.20$$

Partea dreaptă a ecuației se obține integrând termenul de ciocnire

$$\int_{(v)}\frac{\delta(nf)}{\delta t}gd^3v=\frac{\delta(n\langle g\rangle)}{\delta t}, \qquad 5.21$$

şi acest termen poate fi reprezentat ca o sumă:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\delta(n_\alpha\langle g_\alpha\rangle)}{\delta t}=\sum_{\beta,j}\frac{\delta(n_\alpha\langle g_\alpha\rangle)}{\delta t}\bigg|^{(j)}_{\alpha\beta}. \qquad 5.22$$

Pentru ciocnirile elastice folosim termenul de ciocnire în forma 3.22, găsim:

$$\frac{\delta(n_\alpha\langle g_\alpha\rangle)}{\delta t}\bigg|^{(j)}_{\alpha\beta}=\int_{(v\alpha)} S^{(e)}_{\alpha\beta}g(\mathbf{v}_\alpha)d^3v_\alpha = n_\alpha n_\beta \int_{(v_\alpha)}\int_{(v_\beta)}\int_{(\Omega)} g(\mathbf{v}_\alpha)\times$$
$$\left[f_\alpha(v'_\alpha)f\beta(v'_\beta)-f_\alpha(v_\alpha)f_\beta(v_\beta)\right]v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}d\Omega d^3v_\alpha d^3v_\beta \qquad 5.23$$

unde $v_{\alpha\beta}=|v_\alpha-v_\beta|$. Primele integrale pot fi transformate înlocuind componentele vitezei $\mathbf{v}'_\alpha$, $\mathbf{v}'_\beta$ din integrând cu vitezele $\mathbf{v}_\alpha$ şi $\mathbf{v}_\beta$, sau invers, deoarece ciocnirile sunt reversibile. Atunci ţinând seama că viteza relativă rămâne neschimbată în ciocnirile elastice, $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}=\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ şi $d^3v_\alpha d^3v_\beta = d^3v'_\alpha d^3v'_\beta$ obţinem,

$$\iiint g(\mathbf{v}_\alpha)f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha)f_\beta(\mathbf{v}'_\beta)v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}d\Omega d^3v_\alpha d^3v_\beta =$$
$$=\iiint g(\mathbf{v}'_\alpha)f(\mathbf{v}_\alpha)f_\beta(\mathbf{v}_\beta)v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}d\Omega d^3v_\alpha d^3v_\beta$$

înlocuind aceasta în ecuaţia 5.23 găsim că:

$$\frac{\delta n_\alpha\langle g_\alpha\rangle}{\delta t}\bigg|^{(e)}_{\alpha\beta}=n_\alpha n_\beta\iiint\left(g'_\alpha-g_\alpha\right)f f_\beta v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}d^3v_\alpha d^3v_\beta d\Omega \qquad 5.24$$

unde introducem aici următoarea notaţie $g_\alpha=g(\mathbf{v}_\alpha)$, $g'_\alpha=g(\mathbf{v}'_\alpha)$. Expresiile obţinute determină modificarea impulsului ca rezultat al ciocnirilor. Integrala de

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ciocnire a ecuației 5.24, când avem ciocniri între particule identice se anulează, dacă suma valorilor lui $g(v)$ rămâne neschimbată, atunci când în timpul ciocnirii particulelor descreşterea valorii lui $g(v)$ este anulată de creşterea valorii lui $g(v)$. Aceasta se poate obține transformând integrala de ciocnire 5.24 pentru ciocniri între particulelor identice, când funcțiile de distribuție f_α şi f_β sunt identice. Deoarece componentele vitezelor $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ din integrală pot fi permutate, obținem:

$$\iiint\left[g(\mathbf{v}_1')-g(\mathbf{v}_1)\right]f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2)v\sigma d\Omega d^3v_1 d^3v_2 =$$
$$=\iiint\left[g(\mathbf{v}_2')-g(\mathbf{v}_2)\right]f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2)v\sigma d\Omega d^3v_1 d^3v_2 =$$
$$=\frac{1}{2}\iiint\left[g(\mathbf{v}_1')+g(\mathbf{v}_2')-g(\mathbf{v}_1)-g(\mathbf{v}_2)\right]f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2)v\sigma d\Omega d^3v_1 d^3v_2$$

unde am omis indicele α. Deoarece suma $g(\mathbf{v}_1)+g(\mathbf{v}_2)$ rămâne neafectată în procesul de ciocnire, expresia din paranteze şi din integrala 5.24 se anulează.

5.2. Ecuațiile mişcării.

Derivăm acum ecuațiile pentru momentul zero şi primul moment ale ecuației cinetice. Pentru a găsi ecuația momentului zero trebuie să facem $g=1$ în ecuația 5.20:

$$\langle g\rangle = 1;\ \langle gv_k\rangle = \langle v_k\rangle = u_k;$$
$$\langle grad_v g\rangle = 0;\ \frac{\delta(n\langle v\rangle)}{\delta t} = \frac{\delta n}{\delta t} = \int_{(v)}\frac{\delta(nf)}{\delta t}d^3v.$$

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Înlocuind toate aceste relații se obține momentul zero al ecuației cinetice:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -div(n\mathbf{u}) + \frac{\delta n}{\delta t} \qquad 5.36$$

care definește variația temporală a concentrației particulelor de un anumit tip. Primul termen din partea dreaptă reprezintă variația concentrației datorată mișcării particulelor, și cel de-al doilea termen reprezintă variația concentrației ca rezultat al apariției și dispariției particulelor într-un anumit element de volum al plasmei. Apariția și dispariția concentrației particulelor este dată în general de procesele de ***ionizare electron-atom***, iar dispariția particulelor este dată de ***procesele de recombinare.***

Derivăm acum primul moment al ecuației cinetice în care $g = v_k$. Momentul corespunzător egal cu componenta k a vitezei medii este $\langle g \rangle = \langle v_k \rangle = u_k$. Cantitateá $\langle gv \rangle$ care apare în cel de-al doilea termen al ecuației 5.20 poate fi exprimată prin componentele tensorului 5.7, prin presiune și tensorul vâscozitate 5.11

$$\langle gv_l \rangle = \langle v_k v_l \rangle = \frac{P_{kl}}{nm} = u_k u_l + \frac{p}{nm}\delta_{kl} + \frac{\pi_{kl}}{nm}.$$

Folosind aceste relații termenul al doilea al ecuației 5.20 se scrie:

$$div(n\langle \mathbf{gv} \rangle) = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}(n\langle gv_l \rangle) = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}(nu_k u_l) + \frac{1}{m}\sum_l \frac{\partial \pi_{kl}}{\partial x_l} + \frac{1}{m}\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

BCU IAȘI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

La $g = v_k$, $grad_v g$ care apare în cel de-al treilea şi cel de-al patrulea termen este egal cu vectorul unitate în direcţia k. Aceşti termeni pot avea următoarea formă:

$$\frac{Zen}{m}\mathbf{E}\langle grad_v g\rangle = \frac{Zen}{m}E_k$$

$$\frac{Zen}{mc}\langle[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]grad_v g\rangle = \frac{Zen}{mc}\langle[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]_k\rangle = \frac{Zen}{mc}[\mathbf{u}\times\mathbf{H}]_k .$$

Adunând termenii obţinem:

$$\frac{\partial(nu_k)}{\partial t}+\sum_l\frac{\partial}{\partial x_l}(nu_k u_l)+\frac{1}{ml}\frac{\partial p}{\partial x_l}+ \\ +\frac{1}{m}\sum_l\frac{\partial\pi_{kl}}{\partial x_l}-\frac{Zen}{m}\left\{E_k+\frac{1}{c}[\mathbf{u}\times\mathbf{H}]_k\right\}=\frac{\delta(nu_k)}{\delta t} \qquad 5.39$$

Înlocuind $\delta n/\delta t$ în ecuaţia 5.36 si apoi în primul termen al ecuaţiei 5.39

$$\frac{\partial(nu_k)}{\partial t}=n\frac{\partial u_k}{\partial t}+u_k\frac{\partial n}{\partial t}=n\frac{\partial u_k}{\partial t}-u_k\sum_l\frac{\partial(nu_k)}{\partial xl}+u_k\frac{\delta n}{\delta t}$$

ecuaţie care se reduce la forma:

$$mn\frac{\partial u_k}{\partial t}+mn\sum_l u_l\frac{\partial u_k}{\partial x_l}=-\frac{\partial p}{\partial x_k}-\sum_l\frac{\partial\pi_{kl}}{\partial x_l}+nZeE_k+\frac{nZe}{c}[\mathbf{u}\times\mathbf{H}]_k \qquad 5.40 \\ +mn\frac{\delta u_k}{\delta t}$$

unde $n\delta u_k/\delta t=\delta(nu_k)/\delta t-u_k\delta n/\delta t$. Ecuaţii identice se pot obţine şi pentru cele două componente ale vectorului $\mathbf{u}$. Toate formează ecuaţia vectorială a vitezei medii

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$mn\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathrm{u}grad)\mathrm{u}\right]=$$
$$=ZenE+\frac{Zen}{c}[\mathrm{u}\times\mathrm{H}]-gradp-grad\hat{\pi}+nm\frac{\delta \mathrm{u}}{\delta t} \quad 5.41$$

Ecuația de mai sus descrie mişcarea unității de volum a gazului care conține un anumit tip de particule. Cantitatea mn din această ecuație reprezintă densitatea. Expresia din paranteză, din partea stângă reprezintă accelerația hidrodinamică, care este egală cu viteza medie în raport cu timpul $d\mathbf{u}/dt=\partial\mathbf{u}/\partial t+(\mathbf{u}grad)\mathbf{u}$, cu variația vitezei medii în orice punct şi se compune din variația vitezei medii într-un punct fix $\partial\mathbf{u}/\partial t$ şi variația mişcării gazului: $\sum_l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l}\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial t}=\sum_l u_l\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l}$.

Partea dreaptă a ecuației 5.41 este egală cu suma forțelor care acționează aspra unui anumit tip de particule din unitatea de volum: forțele electrice $ZenE$, forța Lorentz $(Zen/c)[\mathbf{u}\times\mathbf{H}]$, forțele gradientului de presiune $(-gradp)$, forțele de vâscozitate $(-grad\hat{\pi})$ şi forțele de frecare din timpul ciocnirilor $(n\delta\mathbf{u}/\delta t)$. Forțele asociate cu $(-gradp)$ şi $(-grad\hat{\pi})$ sunt forțe cinetice şi se datorează transferului de impuls dat de mişcarea de agitație termică a particulelor.

Considerăm acum termenul de ciocnire al ecuației de mişcare. Pentru ciocniri elastice înlocuim $g_a=v_{ak}$ în ecuația 5.24, şi obținem:

$$\left(\frac{\delta n_\alpha u_{\alpha k}}{\delta t}\right)_{\alpha\beta}=n_\alpha\left(\frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t}\right)_{\alpha\beta}$$
$$=n_\alpha n_\beta\int_{(\Omega)}\int_{(v_\alpha)}\int_{(v_\beta)}(v'_{\alpha k}-v_{\alpha k})f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)f_\beta(\mathbf{v}_\beta)v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}d\Omega d^3v_\alpha d^3v_\beta \quad 5.42$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aici am luat în considerare numărul de particule care rămâne neschimbat în timpul ciocnirii elastice $(\delta n_\alpha / \delta t = 0)$. Potrivit ecuației 2.20 integrala care reprezintă schimbarea componentelor vitezei în procesul de ciocnire sumată pe unghiurile de împrăştiere, devine egală cu:

$$\int_{(\Omega)} (v'_{k\alpha} - v_{k\alpha}) \sigma_{\alpha\beta} d\Omega =$$

$$-\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} v_k \int \sigma_{\alpha\beta} (1 - \cos\vartheta) d\Omega = -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} v_k s'_{\alpha\beta}$$

unde $v_k = v_{k\alpha} - v_{k\beta}$ este componenta k a vitezei relative. Înlocuind în ecuația 5.42 obținem:

$$\left(\frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t}\right)_{\alpha\beta} = -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \int_{(v_\alpha)} \int_{(v_\beta)} v_k v'_{\alpha\beta}(v) f_\alpha f_\beta d^3 v_\alpha d^3 v_\beta \qquad 5.43$$

$$= -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \left\langle v_k v'_{\alpha\beta}(v) \right\rangle$$

unde frecvența de ciocnire este $v'_{\alpha\beta} = n_\beta v s'(v)$ care depinde de viteza relativă $v = |v_\alpha - v_\beta|$ şi este mediată pe vitezele particulelor care se ciocnesc. Expresia 5.43 reprezintă variația vitezei medii ca rezultat al ciocnirilor elastice. Pentru electroni, ciocnirile neelastice sunt foarte importante. Pentru procesele în care energia cinetică a mişcării relative a particulelor care se ciocnesc este mai mare decât pierderile neelastice ale energiei, atunci putem neglija aceste pierderi şi expresia pentru termenul $\delta u_k / \delta t$ devine egală cu expresia termenului de ciocnire ca şi în cazul ciocnirilor elastice. În caz contrar când pierderile neelastice sunt apropiate de energia mişcării relative variația vitezei pe fiecare

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ciocnire se datorează pierderii totale a vitezei relative. Ca rezultat (vezi ecuațiile 2.13 şi 2.14),

$$\Delta v_{\alpha k} = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\Delta v_k \approx -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} v_k$$

termenul de ciocnire din relația 5.43 se menține iar frecvența de transport ν^t este înlocuită de frecvența totală a ciocnirilor neelastice $\nu^h = n_\beta v \int \sigma^h d\Omega$. În consecința includerea ciocnirilor neelastice, duce la înlocuirea frecvenței de transport a ciocnirilor elastice în ecuația 5.43, printr-o frecvență de ciocnire de forma următoare:

$$\nu^s = \nu^t(v) + \nu^l(v)\nu^h(v) \qquad 5.44$$

unde ν^l este frecvența totală de transport a ciocnirilor neelastice cu pierderi mici de energie şi ν^h este suma totală a frecvențelor ciocnirilor neelastice cu pierderi mari de energie. La o energie $K_e >> \varepsilon_a, \varepsilon_i$ corecțiile pentru ciocnirile neelastice sunt mici deoarece $\nu^t, \nu^l << \nu^t$. Corecțiile pentru ionizare şi recombinare care determină schimbarea în n pe ciocnire sunt deasemenea mici. Contribuția lor la termenul de ciocnire al ecuației de mişcare poate fi neglijată. Înlocuind în ecuația 5.44 obținem:

$$\frac{\delta(n_\alpha u_{\alpha k})}{\delta t} = n_\alpha \frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} = -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} n_\alpha \left\langle \nu^t_{\alpha\beta}(v_{\alpha k} - v_{\beta k}) \right\rangle . \qquad 5.45$$

Expresiile 5.43 şi 5.45 au o formă simplă în cazul în care frecvența de ciocnire $\nu_{\alpha\beta}$ este independentă de

viteză. În acest caz frecvența de ciocnire poate fi scoasă în afara semnului de mediere şi ecuația 5.45 devine:

$$\frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} = -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \nu_{\alpha\beta} \left\langle v_{\alpha k} - v_{\beta k} \right\rangle = -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \nu_{\alpha\beta} (u_{\alpha k} - u_{\beta k}) . \qquad 5.46$$

În cazul general, termenul de ciocnire al ecuației 5.45 depinde de frecvența de ciocnire $\nu_{\alpha\beta}$ care la rândul ei depinde de viteza v şi de tipul funcțiilor de distribuție. Reprezentăm viteza relativă ca o sumă a componentelor vitezei medii şi vitezei de agitație termică:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \,;\; \mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta \,;\; \mathbf{w} = \mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta . \qquad 5.47$$

Presupunând ca $\mathbf{u} << \mathbf{w}$ şi restricționând expresia 5.46 la termenii liniari în $\mathbf{u}$, obținem:

$$\frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} = -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \left(\left\langle w_k v_{\alpha\beta}(w) \right\rangle + \sum_l u_l \left\langle \frac{\partial (w_k v_{\alpha\beta}}{\partial w_l} \right\rangle \right) . \qquad 5.48$$

Dacă funcția de distribuție pe viteze poate fi considerată izotropă, primul termen şi termenii sumelor care apar în cea de a doua sumă dispar pentru $k = 1$. În acest caz

$$\frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} = -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} u_k \left\langle \frac{\partial (w_k \nu_{\alpha\beta})}{\partial w_k} \right\rangle = -\frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} (u_{\alpha k} - u_{\beta_k}) \overline{\nu}_{\alpha\beta} . \qquad 5.49$$

Ecuația 5.49 diferă de ecuația 5.46 prin frecvența medie de ciocnire. Medierea este obținută din relația:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\bar{\nu}_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial(w_k \nu_{\alpha\beta})}{\partial w_k} \right\rangle = \int_{(w_\alpha)} \int_{(w_\beta)} \frac{\partial(w_k \nu_{\alpha\beta})}{\partial w_k} f_\alpha f_\beta d^3 w_\alpha d^3 w_\beta \quad . \tag{5.50}$$

Derivăm legea pentru distribuția Maxwell pe viteze a particulele α si β. Aici

$$f_\alpha f_\beta = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\right)^{3/2} \left(\frac{m_\beta}{2\pi T_\beta}\right)^{3/2} exp\left[-\left(\frac{m_\alpha w_\alpha^2}{2T_\alpha} + \frac{m_\beta w_\beta^2}{2T_\beta}\right)\right]. \tag{5.51}$$

Pentru a izola funcția de distribuție de vitezele relative trebuie să înlocuim în ecuațiile 5.50 şi 5.51 vitezele particulelor $\mathbf{w}_\alpha$ şi $\mathbf{w}_\beta$ cu vitezele relative $\mathbf{w}$ si $\mathbf{w}_s$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta$$

$$\mathbf{w}_s = \frac{(m_\alpha / T_\alpha) w_\alpha + (m_\beta / T_\beta) w_\beta}{m_\alpha / T_\alpha + m_\beta / T_\beta}. \tag{5.52}$$

Vitezele $\mathbf{w}_\alpha$ şi $\mathbf{w}_\beta$ sunt legate de $\mathbf{w}$ şi $\mathbf{w}_s$ prin:

$$\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{w}_s + \frac{m_\beta T_\alpha \mathbf{w}}{m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha}$$

$$\mathbf{w}_\beta = \mathbf{w}_s - \frac{m_\alpha T_\beta \mathbf{w}}{m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha}. \tag{5.53}$$

Coeficienții din ecuațiile mărimii $\mathbf{w}_s$ sunt selectați astfel încât produsul $f_\alpha f_\beta$ este acelaşi pe distribuția vitezelor relative şi pe $\mathbf{w}_s$. Într-adevăr înlocuind ecuația 5.53 în ecuația 5.51 obținem:

BCU "SI/CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$f_\alpha(\mathbf{w}_\alpha) f_\beta(\mathbf{w}_\beta) = f_r(\mathbf{w}) f_s(\mathbf{w}_s)$$

$$f_r = \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\pi T_{\alpha\beta}}\right)^{3/2} exp\left(-\frac{\mu_{\alpha\beta} w^2}{2T_{\alpha\beta}}\right) \qquad 5.54$$

$$f_s = \left(\frac{m_s}{2\pi T_s}\right)^{3/2} exp\left(-\frac{m_s w_s^2}{2T_s}\right)$$

unde $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$ este masa redusă, $m_s = m_\alpha + m_\beta$ şi

$$T_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \text{ si } T_s = \frac{T_\alpha T_\beta}{T_{\alpha\beta}}. \qquad 5.55$$

Când se ia în considerare ciocnirea electron-particulă grea, ţinem seama că $m_a T_e >> m_e T_a$ si $T_{\alpha\beta} \approx T_e$, $T_s \approx T_a$; pentru ciocnirile particulelor cu mase apropiate ca mărime presupunem că $T_\alpha = T_\beta$, $T_{\alpha\beta} \approx T_s \approx T_\alpha$. Când înlocuim ecuaţia 5.54 în ecuaţia 5.50 luăm în considerare că iacobianul trecerii de la vitezele $\mathbf{w}_\alpha$ şi $\mathbf{w}_\beta$ la $\mathbf{w}$ şi $\mathbf{w}_s$ este egal cu unitatea şi $d^3 w_\alpha d^3 w_\beta = d^3 w d^3 w_s$. Atunci integrând în raport cu $\mathbf{w}_s$ obţinem:

$$\overline{v}_{\alpha\beta} = \int_{(w)} \int_{(w_s)} \frac{\partial (w_k v_{\alpha\beta})}{\partial w_k} f_r(\mathbf{w}) f_s(\mathbf{w}_s) d^3 w d^3 w_s =$$

$$= \int_{(w)} \frac{\partial (w_k v_{\alpha\beta})}{\partial w_k} f_r(\mathbf{w}) d^3 w$$

Integrând prin părţi şi respectând componenta vitezei relative w_k obţinem:

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$\bar{\nu}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\pi T_{\alpha\beta}}\right)^{3/2} \int_{(w)} \frac{\mu_{\alpha\beta} w_k^2}{T_{\alpha\beta}} \nu_{\alpha\beta}(w) exp\left(-\frac{\mu_{\alpha\beta} w^2}{2T_{\alpha\beta}}\right) d^3 w$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{T_{\alpha\beta}}\right)^{5/2} \int_0^\infty w^4 \nu_{\alpha\beta} exp\left(-\frac{\mu_{\alpha\beta} w^2}{2T_{\alpha\beta}}\right) dw \qquad 5.56$$

sau $\bar{\nu}_{\alpha\beta} = \langle \nu_{\alpha\beta} w^2 \rangle / \langle w^2 \rangle$. Rezultatul obținut se bazează pe faptul că distribuția vitezei relative este izotropă şi corespunde momentului al cincilea al aproximației. Dacă ținem seama de corecțiile asociate cu momentele de ordin mai mare ale funcției de distribuție atunci în expresia termenului de ciocnire (ec. 5.48) trebuie neapărat să includem şi alți termeni. În consecință presupunând că funcția de distribuție include momente proporționale cu componentele fluxului de căldură şi este descrisă de ecuația 5.35 trebuie să luăm în considerare primii termeni din ecuația 5.48. Spre exemplu pentru $w_\alpha^2 >> w_\beta^2$ obținem, înlocuind ecuația 5.53 în acest termen,

$$\left(\frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t}\right)_q = -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \int \nu_{\alpha\beta} w_k f_{0\alpha}(w_\alpha) \left[1 - \sum_l \frac{q_{\alpha l}}{n_\alpha T_\alpha} \frac{n w_{\alpha l}}{T_\alpha}\left(1 - \frac{m_\alpha w_\alpha^2}{5T_\alpha}\right)\right] d^3 w_\alpha =$$

$$= \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \frac{q_{\alpha k}}{3 n_\alpha T_\alpha} \left\langle \nu_{\alpha\beta}\left(\frac{m_\alpha w_\alpha^2}{T_\alpha} - \frac{m_\alpha^2 w_\alpha^4}{5T_\alpha^2}\right)\right\rangle \qquad 5.57$$

aici medierea este făcută pe distribuția Maxwelliană a particulelor de tip α. Componentele vectorului $q_{\alpha k}$ ai fluxului de căldură au termenii proporționali cu diferența vitezelor $(u_{\alpha k} - u_{\beta k})$ precum şi un termen proporțional cu $\partial T_\alpha / \partial x_k$. Înlocuirea expresiilor de tipul 5.57 în componentele termenului de ciocnire

$\delta u_{\alpha k} / \delta t = \sum_{\beta} (\delta u_{\alpha k} / \delta t)_{\alpha\beta}$ conduce la două schimbări. Prima, termenii adiționali care apar au o structură asemănătoare ecuației 5.49; ei sunt proporționali cu diferența vitezelor medii $(u_{\alpha k} - u_{\beta k})$ și media frecvenței de ciocnire. Includerea acestor temeni poate conduce la determinarea frecvenței de ciocnire, frecvența de ciocnire efectivă devine diferită de cea dată de ecuația 5.56. În al doilea rând, termenii care apar sunt proporționali cu gradientul temperaturii, rezultă că termenii de ciocnire care apar în ecuația 5.51 pot fi scrişi sub următoarea forma:

$$\frac{m_\alpha n_\alpha \delta u_\alpha}{\delta t} = n_\alpha \sum_{\beta} (\mathbf{R}_{\alpha\beta} + \mathbf{R}^T_{\alpha\beta}) \qquad 5.58$$

unde

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = -\mu_{\alpha\beta} \nu_{\alpha\beta} (u_\alpha - u_\beta) \text{ si } \mathbf{R}^T \approx grad T . \qquad 5.59$$

Vectorul $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$ este proporțional cu diferența dintre vitezele medii $\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta$ şi cu frecvența de ciocnire efectivă $\nu_{\alpha\beta}$, şi determină forța de frecare. Expresia pentru forța de frecare este uşor de obținut din considerente calitative şi ținând seama de variația impulsului în timpul ciocnirii. Modificarea vitezei particulelor care se ciocnesc este maximă numai în ciocnirea frontală. În acest caz vectorul viteză relativă îşi schimbă orientarea (semnul) şi are valoarea $\Delta \mathbf{v}_{max} = \mathbf{v}' - \mathbf{v} = -2\mathbf{v}$. Astfel aproximăm că variația vitezei relative în timpul ciocnirii este egală cu $1/2 \Delta \mathbf{v}_{max}$. Variația medie a impulsului în timpul unei ciocniri este

$$\Delta(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = -\mu_{\alpha\beta} \mathbf{v} = -\mu_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) .$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Multiplicând aceasta cu frecvența $\nu_{\alpha\beta}$ și mediind pe viteze obținem media variației impulsului particulelor care se ciocnesc cele de tip α și de tip β pe unitatea de timp. Această variație determină forța de frecare $R_{\alpha\beta} = -\mu_{\alpha\beta}\nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)$. Dacă frecvența de ciocnire depinde de viteză, acolo există un gradient de temperatură, atunci un termenul adițional $\mathbf{R}^T$ care ține seama de gradienții de temperatură apare în expresia termenului de ciocnire. Acest termen este cunoscut sub denumirea de ***forță termică***. În absența câmpului magnetic, efectul acestui termen este redus, el reprezentând numărul de ciocniri ale particulelor care se mișcă de-a lungul gradientului (regiunea cu frecvență mică de ciocnire) și este mai mic în comparație cu particulele care se deplasează în direcție opusă. Numărul de ciocniri ale particulelor care se deplasează de-a lungul și în opoziție cu gradientul este aproximativ determinat de variația frecvenței de ciocnire sau de drumul liber mediu de ciocnire $\delta\nu = \lambda grad\nu \approx (\nu/v)grad\nu$. Variația medie a impulsului pe unitatea de timp pentru o ciocnire este $\Delta(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \approx \mu_{\alpha\beta}\mathbf{v}$ în functie de $\delta\nu$, și mediind acest produs pe viteze obținem forța termică

$$R^T_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}\langle \mathbf{v}\delta\nu_{\alpha\beta}\rangle \approx \frac{T_{\alpha\beta}}{\nu_{\alpha\beta}} grad\nu_{\alpha\beta} \approx \frac{T_{\alpha\beta}}{\nu_{\alpha\beta}}\frac{d\nu_{\alpha\beta}}{dT_{\alpha\beta}} gradT_{\alpha\beta} \qquad 5.60$$

pentru $(T/\nu)d\omega/dT \approx 1$, $\mathbf{R}^T \approx gradT$ (aici $T_{\alpha\beta}$ este temperatura ce caracterizează distribuția vitezei relative, ecuația 5.55). Într-un câmp magnetic intens când gradientul de temperatură este perpendicular pe direcția câmpului, forța termică este foarte mică, deoarece driftul transversal al particulelor care se ciocnesc este

mult mai mic decât drumul liber mediu de ciocnire. Înlocuind expresia pentru termenul de ciocnire 6.58 în ecuația 6.41 obținem ecuația mișcării particulelor de tip α

$$m_\alpha\left[\frac{\partial \mathrm{u}_\alpha}{\partial t}+(\mathrm{u}_\alpha grad)\mathrm{u}_\alpha\right]=Z_\alpha e\mathrm{E}+\frac{Z_\alpha e}{c}[\mathrm{u}_\alpha\times\mathrm{h}]-$$
$$-\frac{gradp_\alpha}{n_\alpha}-\frac{grad\hat{\pi}_\alpha}{n_\alpha} \qquad . \quad 5.61$$
$$-\sum_\beta \mu_{\alpha\beta}\nu_{\alpha\beta}(\mathrm{u}_\alpha-\mathrm{u}_\beta)+\sum_\beta \mathrm{R}^T_{\alpha\beta}$$

În relația de mai sus am neglijat efectele de vâscozitate. În majoritatea cazurilor putem neglija termenul al doilea (în raport cu $\mathbf{u}$) în partea stângă a ecuației, care este de ordinul

$$\left|m_\alpha(\mathbf{u}_\alpha grad)\mathbf{u}_\alpha\right|\approx\frac{m_\alpha \mathbf{u}_\alpha^2}{L}$$

iar când anizotropia distribuției pe viteze este mică, atunci termenul este proporțional cu gradientul presiunii:

$$grad\frac{p_\alpha}{n}\approx\frac{p_\alpha}{n_\alpha L}\approx\frac{T_\alpha}{L}$$

unde L este lungimea caracteristică pe care parametrii plasmei se modifică substanțial. Aici ecuația 5.61 (liniara în $\mathbf{u}$) ia următoarea formă:

$$m_\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}=Z_\alpha e\mathrm{E}+\frac{Z_\alpha e}{c}[\mathrm{u}_\alpha\times\mathrm{H}]-\frac{gradp_\alpha}{n_\alpha} \qquad . \quad 5.62$$
$$-\sum_\beta \mu_{\alpha\beta}\nu_{\alpha\beta}(\mathrm{u}_\alpha-\mathrm{u}_\beta)+\sum_\beta \mathrm{R}^T_{\alpha\beta}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.3. Ecuațiile energiei și fluxului de căldură.

Acum ne propunem să derivăm ecuațiile celui de-al doilea ordin al momentului și anume ecuația energiei. Pentru aceasta presupunem că $g = mv^2/2$ din ecuația 5.20. Valorile medii ale cantităților ce apar în ecuație sunt

$$\langle g \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \langle K \rangle$$

$$\langle g\mathbf{v} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{v}mv^2}{2} \right\rangle = \frac{\mathbf{Q}}{n}$$

$$\langle grad_v g \rangle = \langle m\mathbf{v} \rangle = m\mathbf{u}$$

$$\langle (\mathbf{[v \times H]} grad_v g) \rangle = \langle (\mathbf{[v \times H]} m\mathbf{v}) \rangle = 0$$

unde $\mathbf{Q}$ este vectorul fluxului de energie (ec. 5.12). Înlocuindu-le în ecuația 5.20 obținem:

$$\frac{\partial (n\langle K \rangle)}{\partial t} = -div\mathbf{Q} + Ze n\mathbf{uE} + \frac{\delta (n\langle K \rangle)}{\delta t}. \qquad 5.63$$

Ecuațiile 5.63 arată că variația energiei cinetice a particulelor apare din trei motive. Primul motiv este transferul de energie în mișcare. Acesta este descris de divergența fluxului ($div\mathbf{Q}$). Al doilea motiv este încălzirea particulelor de către curentul plasmei. Puterea specifică a acestei încălziri este produsul dintre densitatea de curent ($\mathbf{j} = Ze n\mathbf{u}$) și intensitatea câmpului electric ($\mathbf{E}$). Al treilea motiv este variația energiei din timpul ciocnirii $\delta(n\langle K \rangle)/\delta t$. Transformăm acum ecuația bilanțului de energie reprezentând energia cinetică ca o sumă a energiilor arbitrare și a mișcării de drift (ec. 5.5):

$\langle K\rangle = mu^2/2 + 3/2T$. Folosind ecuaţia 5.13 pentru densitatea fluxului energiei găsim:

$$\frac{3}{2}n\frac{\partial T}{\partial t} + mn\mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\frac{3}{2}T + \frac{mu^2}{2}\right)\frac{\partial n}{\partial t} + div\mathbf{q} + \\ + div\left(\frac{5}{2}\mathbf{u}nT\right) + div(\hat{\pi}\mathbf{u}) + div\left(n\mathbf{u}\frac{mu^2}{2}\right) \quad . \quad 5.64 \\ + Zen\mathbf{u}\mathbf{E} = \frac{\delta(n\langle K\rangle)}{\delta t}$$

Cu ajutorul acestei expresii pentru $\partial n/\partial t$ şi $\partial \mathbf{u}/\partial t$ din ec. 5.36 şi 5.41 această ecuaţie devine

$$n\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2}{3}div\mathbf{q} + n\mathbf{u}gradT + \frac{2}{3}nTdiv\mathbf{u} + \frac{2}{3}\hat{\pi}grad\mathbf{u} = n\frac{\delta T}{\delta t} \qquad 5.65$$

unde $n\frac{\delta T}{\delta t} = \frac{2}{3}\delta(n\langle K\rangle)/\delta t - T\delta n/\delta t - mn(\delta \mathbf{u}/\delta t)\mathbf{u}$.

Ne propunem să găsim acum termenul de ciocnire. Înlocuim $g_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2/2$ în ecuaţia 5.24, obţinem:

$$\frac{\delta(n\langle K_\alpha\rangle)}{\delta t} = \\ = n_\alpha n_\beta \int_{(v_\alpha)}\int_{(v_\beta)}\int_{(\Omega)}\left(\frac{m_\alpha v_\alpha'^2}{2} - \frac{m_\alpha v_\alpha'^2}{2}\right) + v_{\alpha\beta}\sigma d\Omega f_\alpha f_\beta d^3v_\alpha^2 d^3v_\beta^2 \\ 5.66$$

În concordantă cu ecuaţia 2.23 variaţia energiei cinetice în timpul ciocnirii sumând pe unghiurile de împrăştiere poate fi găsită din relaţia

BCU MS/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_{\Omega}\left(\frac{m_\alpha v_\alpha'^2}{2}-\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}\right)\delta d\Omega=-\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha+m_\beta}\int_{\Omega} v_0 v_{\alpha\beta}(1-\cos\theta)\sigma d\Omega=$$

$$=-\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha+m_\beta} v_0 v_{\alpha\beta} s'_{\alpha\beta}=$$

$$=-\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha+m_\beta} s'_{\alpha\beta}\left[m_\alpha v_\alpha^2-m_\beta v_\beta^2+(m_\beta-m_\alpha)v_\alpha v_\beta\right]$$

Înlocuind această ecuație în 5.56 obținem

$$\left(\frac{\delta n\langle T_\alpha\rangle}{\delta t}\right)_{\alpha\beta}=-\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha+m_\beta} n_\alpha\left\langle v_0 v v'_{\alpha\beta}(v)\right\rangle=$$

$$=\frac{2m_\alpha m_\beta}{m_\alpha+m_\beta} n_\alpha\left\langle v_{\alpha\beta}\left[\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}-\frac{m_\beta v_\beta^2}{2}+\frac{(m_\beta-m_\alpha)v_\alpha v_\beta}{2}\right]\right\rangle \qquad 5.67$$

unde media se face pe vitezele particulelor α şi β. Dacă frecvența de ciocnire $\nu_{\alpha\beta}$ este independentă de viteză atunci poate fi scrisă în fața integralei. Reprezentând viteza unei particule ca suma dintre viteza medie şi arbitrară găsim,

$$\left(\frac{\delta n_\alpha\langle K_\alpha\rangle}{\delta t}\right)_{\alpha\beta}=-\frac{3}{2}\kappa_{\alpha\beta} n_\alpha \nu'_{\alpha\beta}(T_\alpha-T_\beta)$$

$$-\kappa_{\alpha\beta}\nu'_{\alpha\beta}\left[\frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2}-\frac{m_\beta u_\beta^2}{2}+\frac{(m_\beta-m_\alpha)\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\beta}{2}\right]. \qquad 5.68$$

Primul termen din ecuația 5.68 determină energia de agitație termică în timpul ciocnirii şi cel de-al doilea termen variația energiei medii. Este uşor de văzut că aceasta dispare pentru $\mathbf{u}_\alpha=\mathbf{u}_\beta$, când două componente

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ale plasmei, în medie, sunt în repaus una față de cealaltă și nu există frecare. Pentru a găsi termenul de ciocnire care apare în partea dreaptă a ecuației 5.65 trebuie să adăugăm cantitatea $-mu_\alpha \delta(n_\alpha u_\alpha)/\delta t$ la ecuația 5.68. Folosind ecuația 5.46 pentru $\nu_{\alpha\beta} = constant$ găsim,

$$m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \left(\frac{\delta n_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{\delta t}\right)_{\alpha\beta} = -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} n_\alpha \nu'_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)$$

$$\frac{3}{2}\frac{\delta(n_\alpha T_\alpha)}{\delta t} = \frac{\delta(n_\alpha \langle K_\alpha \rangle)}{\delta t} - m_\alpha \mathrm{u}_\alpha \frac{\delta(n_\alpha u_\alpha)}{\delta t} =$$

$$-\frac{3}{2}\kappa_{\alpha\beta} n_\alpha \nu'_{\alpha\beta}(T_\alpha - T_\beta) + \qquad 5.69$$

$$+\frac{m_\alpha m_\beta^2}{(m_\alpha + m_\beta)^2} n_\alpha \nu'_{\alpha\beta} (\mathrm{u}_\alpha - \mathrm{u}_\beta)^2$$

Când frecvența de ciocnire este dependentă de viteză, media se face în concordantă cu ecuația 5.67. Dacă distribuția este Maxwelliană, reprezentăm în ecuația 5.67 vitezele particulelor ca suma dintre viteza medie și viteza arbitrară, astfel încât

$$\langle \mathbf{v}_0 \mathbf{v} \nu(v) \rangle =$$

$$= \sum_k \langle v_{0k} v_k \nu(v) \rangle \approx \sum_k \langle (u_{0k} + w_{0k}) \rangle \left[w_k \nu(w) + \sum_l \frac{\partial(w_k \nu)}{\partial w_l} u_l \right] = .$$

$$= \sum_k \langle w_{0k} w_k \nu(w) \rangle + \sum_k u_{0k} \left\langle \frac{\partial(w_k \nu)}{\partial w_k} \right\rangle u_k$$

5.70

Aici $\mathbf{u}_0$ si w_0 sunt componentele vitezei centrului de masă:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\mathbf{u}_0 = \frac{m_\alpha \mathbf{u}_\alpha + m_\beta \mathbf{u}_\beta}{m_\alpha + m_\beta}; \quad \mathbf{w}_0 = \frac{m_\alpha \mathbf{w}_\alpha + m_\beta \mathbf{w}_\beta}{m_\alpha + m_\beta}.$$

În ecuația 5.70 distribuția vitezelor de agitație termică este tratată ca fiind izotropă. Pentru a obține mediile cantităților care apar în ecuația 5.70 trebuie să o multiplicăm cu funcțiile de distribuție ale particulelor α si β. Ca şi în secțiunea anterioară 5.2 (vezi 5.54), produsul funcțiilor de distribuție ale particulelor α şi β, $f_\alpha(w_\alpha) f_\beta(w_\beta)$ poate fi transformat în produsul unei funcții Maxwell cu vitezele relative $\mathbf{w}$ şi vitezele $\mathbf{w}_s$ definite de egalitatea 5.52. Când mediem (ecuația 5.70) trebuie să trecem de la $\mathbf{w}_0$ la $\mathbf{w}_s$. Relația dintre ele se obține din ecuația 5.53:

$$\mathbf{w}_0 = \frac{m_\alpha \mathbf{w}_\alpha + m_\beta \mathbf{w}_\beta}{m_\alpha + m_\beta} = \mathbf{w}_s + \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \frac{(T_\alpha - T_\beta)}{T_{\alpha\beta}} \mathbf{w}$$

unde $T_{\alpha\beta} = (m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha)/(m_\alpha + m_\beta)$ este temperatura care caracterizează distribuția vitezelor relative. Folosind această ecuație şi ținând seama de independența distribuțiilor pe vitezele $\mathbf{w}$ si $\mathbf{w}_s$, găsim:

$$\langle w_{0k} w_k \nu(v) \rangle = \langle w_{sk} \rangle \langle w_k \nu(w) \rangle + \frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} \frac{(T_\alpha - T_\beta)}{T_{\alpha\beta}} \langle w_k^2 \nu(v) \rangle =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{m_\alpha m_\beta (T_\alpha - T_\beta)}{(m_\alpha + m_\beta)^2 T_{\alpha\beta}} \langle w^2 \nu(v) \rangle$$

Înlocuind acest rezultat în ecuația 5.70 şi folosind frecvența medie de ciocnire definită de ecuațiile 5.50 şi 5.56, găsim că

$$\left\langle \mathbf{v}_0 \mathbf{v} \nu_{\alpha\beta} \right\rangle = \frac{T_\alpha - T_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \bar{\nu}_{\alpha\beta} + \frac{m_\alpha u_\alpha^2 - m_\beta u_\beta^2 + (m_\beta - m_\alpha) u_\alpha u_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \bar{\nu}_{\alpha\beta} \quad . \qquad 5.71$$

Ecuația 5.71 ne furnizează valoarea lui $\delta(n\langle K \rangle)/\delta t$ (vezi ecuația 5.67). De asemenea pentru ecuația 5.49, găsim expresia pentru termenul de ciocnire al ecuației 5.65:

$$\frac{3}{2} n_\alpha \frac{\delta T_\alpha}{\delta t} = \frac{\delta(n_\alpha \langle K_\alpha \rangle)}{\delta t} - m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \frac{\delta \mathbf{u}_\alpha}{\delta t} =$$

$$= -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} n_\alpha \left[\left\langle \mathbf{v}_0 \mathbf{v} \nu_{\alpha\beta} \right\rangle - \mathbf{u}_\alpha \left\langle \mathbf{v} \nu_{\alpha\beta} \right\rangle \right] = \quad . \qquad 5.72$$

$$= -\frac{3}{2} \kappa_{\alpha\beta} n_\alpha (T_\alpha - T_\beta) \bar{\nu}_{\alpha\beta} + \frac{m_\alpha m_\beta^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2} n_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)^2 \bar{\nu}_{\alpha\beta}$$

Această expresie diferă de 5.69 prin faptul că frecvența de ciocnire este înlocuită cu valoarea medie determinată de ecuația 5.56.

Pentru electroni în ecuația energiei, trebuie să ținem seama şi de ciocnirile neelastice. Ciocnirile în care avem pierderi mici de energie pot fi tratate ca fiind ciocniri elastice şi variația energiei cinetice poate fi practic aproximată cu energia de excitare $\frac{m_e v'^2}{2} - \frac{m_e v^2}{2} = -\varepsilon_j$. Înlocuind variația energiei cinetice în ecuația 5.66 şi sumând pe toate procesele în care au loc pierderi mici de energie, găsim:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left(\frac{\delta n_e\langle K_e\rangle}{\delta t}\right)_{e_a}^{l} = -n_e \sum_j \int_{(v_a)}\int_{(v_e)} \varepsilon_j \nu_{ea}^{(j)} f_e f_a d^3v_a d^3v_e =$$

$$= -n_e \int_{(v_a)}\int_{(v_e)} \kappa_{ea}^{l}\nu_{ea}^{l} \frac{m_e v^2}{2} f_e f_a d^3v_e d^3v_a \qquad 5.73$$

unde am introdus ca şi în secţiunea 5.2 frecvenţa sumată a ciocnirilor neelastice cu pierderi mici de energie şi coeficientul de transfer al energiei. Presupunând că energia cinetică a electronilor depăşeşte pe cea a atomilor putem neglija dependenta mărimii $\kappa^l\nu^l$ de viteza atomului şi integrând ecuaţia 5.73 în raport cu $\mathbf{v}_a$, termenul de ciocnire va lua următoarea forma:

$$\left(\frac{\delta n_e\langle K_e\rangle}{\delta t}\right)_{ea}^{l} = -n_e \int_{(ve)} \kappa_{ea}^{l}\nu_{ea}^{l} \frac{m_e v_e^2}{2} f_e(\mathrm{v}_e) d^3v_e$$

$$= -n_e\left\langle \kappa_{ea}^{l}\nu_{ea}^{l} K_e\right\rangle \approx -\frac{3}{2}\kappa_{ea}^{l}\nu_{ea}^{l} n_e T_e \qquad 5.74$$

Este foarte uşor să includem ciocnirile cu pierderi mari de energie dacă presupunem că energia electronului după ciocnire este aproape de zero. Atunci putem folosi integrala de ciocnire din [3,4] şi termenul de ciocnire devine:

$$\left(\frac{\delta n_e\langle K_e\rangle}{\delta t}\right)_{ea}^{h} = -n_e \sum_j \int_{(v_e)} \frac{m_e v_e^2}{2} \nu_{ea}^{j} f_e d^3v_e$$

$$= -n_e\left\langle \nu_{ea}^{h} K_e\right\rangle \approx -\frac{3}{2}\bar{\nu}_{ea}^{h} n_e T_e \qquad 5.75$$

Am introdus aici frecvența ciocnirilor neelastice cu pierderi mari de energie $\nu_{ea}^{h} = \sum_{j} \nu_{ea}^{j}$. Egalitățile 5.74 și 5.75 arată că includerea ciocnirilor neelastice duce la înlocuirea în expresia termenului de ciocnire a valorii $\kappa\nu_{\alpha\beta}$ printr-o valoare care să țina seama de pierderile de energie atât în ciocnirilor elastice şi cat şi în cele neelastice:

$$\overline{\kappa_{ea}^{s}\nu_{ea}^{s}} = \overline{\kappa_{ea}\nu_{ea} + \kappa_{ea}^{J}\nu_{ea}^{J} + \nu_{ea}^{h}}\,. \qquad 5.76$$

Este uşor de observat că în termenul al doilea al ecuației 5.72 corecția pentru ciocnirile neelastice în termenii frecvenței de ciocnire elastică ν_{ea} poate fi înlocuită cu frecvența de ciocnire ν_{ea}^{s}. Aceasta corecție este mică când frecvența ciocnirilor neelastice este mult mai mică decât cea a ciocnirilor elastice. Substituind expresia 5.72 pentru termenul de ciocnire în ecuația bilanțului de energie, se obține:

$$n_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \frac{2}{3} div\mathrm{q}_\alpha + n_\alpha \mathrm{u}_\alpha grad T_\alpha + \frac{2}{3} n_\alpha T_\alpha div\mathrm{u}_\alpha + \frac{2}{3}\hat{\pi} grad\mathrm{u}_\alpha$$
$$= -n_\alpha \sum_\beta \overline{\kappa_{\alpha\beta}\nu_{\alpha\beta}}\left(T_\alpha - T_\beta\right) + \frac{2}{3} n_\alpha \sum_\beta \left\langle \nu_{\alpha\beta} \right\rangle \frac{m_\alpha m_\beta^2}{m_\alpha + m_\beta}\left(\mathrm{u}_\alpha - \mathrm{u}_\beta\right)^2 \qquad 5.77$$

În continuare neglijăm efectul vâscozității, omițând termenul corespunzător în această ecuație. Pentru particulele grele (ioni si atomi) putem neglija termenul de ciocnire corespunzător mişcării medii, deoarece la anizotropii mici ($mu^2/2 << T$) aceşti termeni sunt mult mai mici decât termenii dați de mişcarea termică. Atunci ecuația energiei pentru particulele grele ia următoarea formă:

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

$$n_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \frac{2}{3} div q_\alpha + n_\alpha u_\alpha grad T + \frac{2}{3} n_\alpha T_\alpha div u_\alpha = \\ = -n_\alpha \sum_\beta \overline{\kappa_{\alpha\beta} \nu_{\alpha\beta}} (T_\alpha - T_\beta) \qquad 5.78$$

unde $\kappa_{\alpha\beta} = 2m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)^2$. Ecuația bilanțului energetic pentru electroni poate fi scrisă în felul următor:

$$n_e \frac{\partial T_e}{\partial t} + \frac{2}{3} div q_e + n_e u_e grad T_e + \frac{2}{3} n_e T_e div u_e \\ = -n_e \sum_\beta \overline{\kappa_{e\beta}^s \nu_{e\beta}^s} (T_e - T_\beta) + \frac{2}{3} n_e \sum_\beta \nu_{e\beta} m_e (u_e - u_\beta)^2 \qquad 5.79$$

unde în conformitate cu ecuația 5.76 produsul $\kappa\nu$ este înlocuit de o valoare medie care ține seama de ciocnirile neelastice. Ecuațiile 5.77-5.79 includ momentele de ordinul 3, adică componentele vectorului flux de căldură.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6. Fenomene de transport în plasmă în absența câmpului magnetic

6.1. Mişcarea particulelor încărcate şi transportul energiei într-o plasmă slab ionizată.

Acest capitol descrie procesele care guvernează transportul particulelor încărcate şi energiei într-o plasmă în absenta câmpului magnetic. Procesele principale sunt ***mişcarea direcționată a particulelor încărcate, transportul energiei şi schimbul de energie în timpul ciocnirii.*** Fie o plasmă care conține electroni, ioni pozitivi simpli, şi atomi. Procesele de transport în plasmă depind şi de gradul de ionizare al plasmei. Pentru aceasta considerăm două cazuri extreme, o plasmă slab ionizată în care frecvența de ciocnire a electronilor şi ionilor cu atomii este mai mare decât cea a ciocnirilor acestor particulele unele cu altele,

$$\begin{aligned} \nu_{ea} &>> \nu_{ei}, \nu_{ee} \\ \nu_{ia} &>> \nu_{ii}, \frac{m_e}{m_i}\nu_{ei} \end{aligned} \qquad 6.1$$

şi o plasmă cu grad mare de ionizare care este descrisă de inversul inegalităților de mai sus. Gradul de ionizare caracteristic tranzițiilor dintre cele două cazuri este ilustrat pentru o plasmă generată în hidrogen în figura 6.1.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

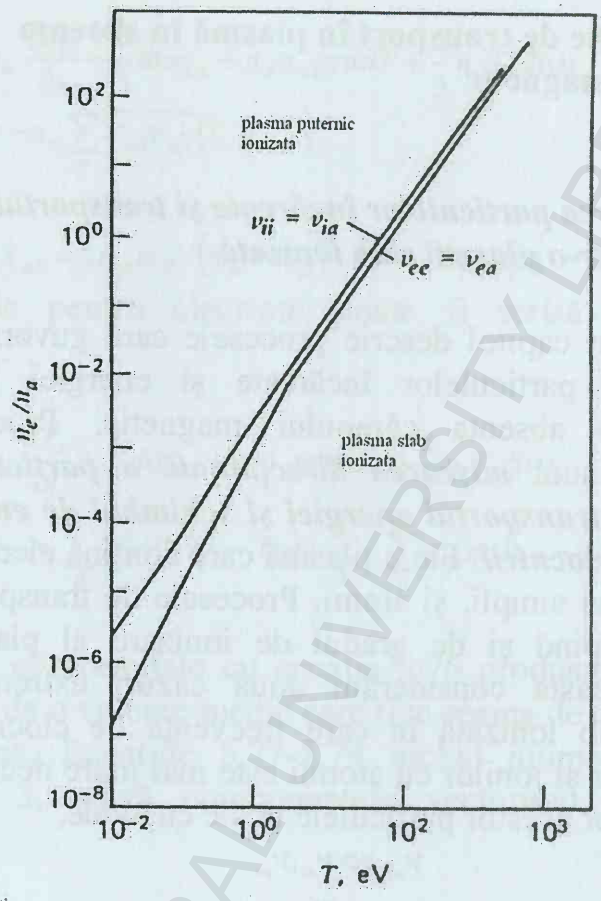

Figura 6.1.
Gradul de ionizare caracteristic tranziţiilor dintre plasmele slab ionizate şi puternic ionizate [3].

Considerăm transportul particulelor într-o plasmă slab ionizată. Mişcarea particulelor încărcate este dată de momentului întâi al ecuaţiei cinetice. Atunci când efectele date de către vâscozitate sunt neglijate aceste ecuaţii se reduc la egalitatea vectorială 5.62 iar în absenta câmpului magnetic egalitatea ia următoarea forma:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$m_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} = Z_\alpha e\mathbf{E} - \frac{1}{n} grad(nT_\alpha) + \frac{m_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha}{\delta t} \qquad 6.2$$

unde pentru electroni $\alpha = 1$, $Z_e = -1$ şi pentru ioni $\alpha = i$, $Z_i = 1$ şi $n_e = n_i = n$. Termenul de ciocnire pentru o plasmă slab ionizată, când inegalitatea 6.1 este valabilă, include termenii daţi de ciocnirile particulelor încărcate cu neutrii. Când frecvenţa de ciocnire este independentă de viteza particulelor, termenul de ciocnire este egal cu forţa de frecare şi satisface ecuaţia 5.59

$$\frac{m_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha}{\delta t} = \mathbf{R}_{\alpha a} = -\mu_{\alpha a} \nu_{\alpha a} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_a) \qquad 6.3$$

unde $\nu_{\alpha a} = \nu'_{\alpha a}$ este frecvenţa de transport şi $\mu_{\alpha a} = \frac{m_\alpha m_a}{m_\alpha + m_a}$ este masa redusă (pentru electroni $\mu_{ea} = m_e$ şi pentru ioni $\mu_{ia} = \frac{1}{2} m_i$ la $m_i = m_a$). Într-o plasmă slab ionizată viteza medie a atomilor neutri este mult mai mică decât cea a particulelor încărcate. Aici forţa de frecare devine egală cu

$$\mathbf{R}_{\alpha a} = -\mu_{\alpha a} \nu_{\alpha a} \mathbf{u}_\alpha . \qquad 6.4$$

Astfel cu această condiţie ecuaţia ia forma

$$\left| \frac{m_\alpha \partial u_{\alpha k}}{\partial t} \right| \approx \frac{m_\alpha u_{\alpha k}}{\tau} << |R_k| \approx m_\alpha u_{\alpha k} \nu_{\alpha a} \text{ sau } \nu_{\alpha a} >> 1 . \qquad 6.5$$

Aceasta înseamnă că folosirea soluţiei staţionare a ecuaţiei 6.2 este valabilă cât timpul caracteristic al variaţiei parametrilor în plasma τ întrece timpul dintre două ciocniri l/v. Anulând primul termen în ecuaţia

BCU CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

6.2 şi substituind ecuaţia 6.4 care conţine termenul de ciocnire, ecuaţia 6.2 se reduce la forma următoare:

$$Z_{\alpha e}E-\frac{1}{n}grad(nT_\alpha)-\mu_{\alpha a}\nu_{\alpha a}u_\alpha=0\,. \qquad 6.6$$

Egalitatea obţinută ne permite să găsim viteza medie

$$\mathbf{u}_\alpha=\frac{Z_\alpha e}{\mu_\alpha\nu_{\alpha a}}\mathrm{E}-\frac{T_\alpha}{\mu_\alpha\nu_{\alpha a}}\frac{gradn}{n}-\frac{1}{\mu_\alpha\nu_{\alpha a}}gradT_\alpha \qquad 6.7$$

aceasta reprezentând suma a trei termeni

$$\mathbf{u}_\alpha=\mathbf{u}_{\alpha E}+\mathbf{u}_{\alpha n}+\mathbf{u}_{\alpha T} \qquad 6.8$$

dintre care primul termen este viteza asociată cu acceleraţia particulelor încărcate într-un câmp electric. Factorul de proporţionalitate b_α dintre viteză şi câmpul electric se numeşte mobilitate,

$$\mathbf{u}_{\alpha E}=Z_\alpha b_\alpha\mathrm{E}$$

$$b_a=\frac{e}{\mu_{\alpha a}\nu_{\alpha a}}\,. \qquad 6.9$$

Termenul al doilea descrie difuzia datorată neomogenităţii densităţii particulelor încărcate. Viteza de difuzie este proporţională cu gradientul densităţii:

$$\mathbf{u}_{\alpha n}=-D_\alpha\frac{gradn}{n},\ D_\alpha=\frac{T_\alpha}{\mu_{\alpha a}\nu_{\alpha a}}\,. \qquad 6.10$$

Termenul de proporţionalitate se numeşte coeficient de difuzie. Ultimul termen din ecuaţia 6.8 descrie difuzia

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

datorată gradientului de temperatură, aşa-numita difuzie termică. Viteza difuziei termice directe este $\mathbf{u}_{\alpha T}$, poate fi reprezentată într-o forma similară cu ecuaţia 6.10:

$$\mathbf{u}_{\alpha T} = -D_\alpha^T \frac{gradT_\alpha}{T_\alpha}, \quad D_\alpha^T = \frac{T_\alpha}{\mu_{\alpha a} \nu_{\alpha a}} \qquad 6.11$$

unde D_α^T este coeficientul difuziei termice. Există o relaţie între toţi aceşti coeficienţi care determină viteza medie. Folosind ecuaţiile 6.9 si 6.10 obţinem relaţia dintre coeficienţii de difuzie şi mobilitate:

$$\frac{D_\alpha}{b_\alpha} = \frac{T_\alpha}{e} \qquad 6.12$$

aceasta este ***relaţia Einstein***. Viteza medie totală a particulelor încărcate poate fi exprimată prin coeficienţii de transport menţionaţi mai sus. Înlocuind ecuaţiile 6.9-6.11 în ecuaţia 6.8 găsim pentru electroni:

$$\mathbf{u}_e = -b_e \mathrm{E} - D_e \frac{gradn}{n} - D_e^T \frac{gradT_e}{T_e} \qquad 6.13$$

unde $b_e = e/m_e \nu_{ea}$, $D_e = T_e/m_e \nu_{ea}$ şi pentru ioni

$$\mathbf{u}_i = b_i \mathbf{E} - D_i \frac{gradn}{n} - D_i^T \frac{gradT_i}{T_i} \qquad 6.14$$

unde $b_i = 2e/m_i \nu_{ia}$, $D_i = 2T_i/m_i \nu_{ia}$. Folosind aceste expresii putem să găsim densitatea curentului în plasma, care este dată de suma componentelor ionice şi electronice:

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\mathrm{j} = -ne\mathbf{u}_i - ne\mathbf{u}_e = en(b_e + b_i)\mathrm{E} +$$
$$+ e(D_e - D_i)gradn + en\left(D_e^T \frac{gradT_e}{T_e} - D_i^T \frac{gradT_i}{T_i}\right). \qquad 6.15$$

Componenta ionică este uneori neglijată deoarece coeficienţii de transport sunt invers proporţionali cu masa ionului. Primul termen al ecuaţiei 6.15 reprezintă conductivitatea plasmei σ într-un câmp electric:

$$j_E = \sigma \mathbf{E},\ \sigma \approx enb_e = \frac{ne^2}{m_e \nu_{ea}} \qquad 6.16$$

de unde se poate vedea că aceasta este proporţională cu densitatea plasmei. Expresiile obţinute descriu viteza medie a particulelor încărcate, atunci când frecvenţa lor de ciocnire cu neutrii este independentă de viteză. Pentru o distribuţie nemaxwelliană pe viteze a particulelor încărcate, viteza medie poate fi obţinută înlocuind expresia termenului de ciocnire derivat în paragraful 6.3 în primul moment al ecuaţiei Boltzmann. Expresia conţine doi termeni, forţa de frecare şi forţa termică (vezi ecuaţia 5.58)

$$m_\alpha \frac{\delta u_\alpha}{\delta t} = R_{\alpha a} + R_{\alpha a}^T . \qquad 6.17$$

Ca şi mai înainte forţa de frecare poate fi reprezentată în forma 6.4 dacă luăm în considerare frecvenţa medie de ciocnire. Într-o primă aproximaţie aceasta este dată de următoarea egalitate (vezi ecuaţia 5.56):

$$\nu_{\alpha a} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\mu_{\alpha a}}{T_{\alpha a}}\right)^{5/2}\int_0^\infty w^4 \nu'_{\alpha a}(w)\exp\left(\frac{\mu_{\alpha a} w^2}{2T_{\alpha a}}\right)dw$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^4 \nu'_{\alpha a}\left(x\sqrt{\frac{T_{\alpha a}}{\mu_{\alpha a}}}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \qquad 6.18$$

unde temperatura, $T_{\alpha a} = (m_a T_\alpha + m_\alpha T_a)/(m_a + m_\alpha)$ corespunde distribuției vitezei relative. În particular, dacă frecvența de ciocnire este proporțională cu viteza $\nu'_{\alpha a} \sim w$, valoarea medie a ecuației 6.18 este egală cu

$$\nu_\alpha = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\nu'_\alpha(v_T)$$

şi dacă frecvența de ciocnire este invers proporțională cu viteza, atunci este egală cu

$$\nu_\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\nu'_\alpha(v_T)$$

unde $v_T = \sqrt{3T_{\alpha a}/\mu_{\alpha a}}$. Forța termică este indusă de gradientul de temperatură şi este egală, în absenta câmpului magnetic cu:

$$R^T_{\alpha a} \approx g_{Ta} grad T_{\alpha a} \qquad 6.19$$

unde coeficientul g_{Ta} este dependent de viteza $\nu_{\alpha a}$. Valoarea lui g_{Ta} coincide cu un factor de ordinul unității, cu ecuația 5.60:

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$g_{Ta} \approx \frac{T_{\alpha a}}{\nu_{\alpha a}} \frac{d\nu_{\alpha a}}{dT_{\alpha a}}.$$

Pentru a găsi o valoare cu o acuratețe mai bună a frecvenței efective de ciocnire, care determină forța de frecare şi pentru a calcula valoarea coeficientului g_{Ta} care definește forța termică, avem de rezolvat ecuațiile mişcării şi fluxului de căldură simultan (vezi 5.2). Înlocuind termenul de ciocnire 6.17 în ecuația 6.2 ne conduce înapoi la ultimele expresii pentru componentele vitezei (ecuațiile 6.9-6.11). Coeficienții mobilității (b) şi difuziei (D) satisfac expresiile 6.9 şi 6.10, dacă frecvența de ciocnire este înlocuită cu valoarea ei medie. În determinarea coeficientului difuziei termice trebuie să considerăm efectul forței termice din ecuația 6.18. Adăugându-l la forța gradientului de presiune, se obține:

$$D_\alpha^T = \left(\frac{T_\alpha}{\mu_{\alpha a}\nu_{\alpha a}}\right)(1-g_{T\alpha}). \qquad 6.20$$

Aceasta ecuație arată că coeficientul difuziei termice poate fi mai mare (la $g \sim d\nu/dT < 0$) sau mai mic (la $g \sim d\nu/dT > 0$) decât coeficientul de difuzie. Ne propunem acum să aflăm fluxul de căldură care caracterizează transportul de energie al particulelor încărcate. Ecuațiile vectoriale ale fluxului de căldură **q** (al treilea moment al ecuației Boltzmann) sunt determinate în capitolul anterior. În cazul staționar şi în absența câmpului magnetic ecuațiile au următoarea formă [3-7],

$$\frac{5}{2}\frac{n_\alpha T_\alpha}{m_\alpha} grad T_\alpha = \frac{\delta \mathbf{q}_\alpha}{\delta t}. \qquad 6.21$$

Într-o plasmă slab ionizată numai ciocnirile dintre particulele încărcate şi neutrii sunt importante. Pentru electroni termenul de ciocnire, când frecventa de ciocnire este independentă de viteză este conform [3-7]: $\delta \mathbf{q}_e / \delta t = -\nu_{ea} \mathbf{q}_e$. Înlocuind în ecuaţia 6.21 obţinem expresia fluxului de căldura pentru electroni

$$\mathbf{q}_e = -\frac{5}{2}\frac{nT_e}{m_e \nu_{ea}} grad T_e. \qquad 6.22$$

Factorul de proporţionalitate dintre fluxul de căldură şi gradientul de temperatură este denumit coeficientul conductivităţii termice, şi raportul său la concentraţie este coeficientul conductivităţii temperaturii. Aceşti coeficienţi au următoarea formă:

$$\kappa_e = \frac{5}{2}\frac{nT_e}{m_e \nu_{ea}}$$

$$\chi e = \frac{\kappa_e}{n} = \frac{5}{2}\frac{T_e}{m_e \nu_{ea}} = \frac{5}{2} D_e. \qquad 6.23$$

Coeficientul conductivităţii termice diferă de coeficientul de difuzie al electronilor (ecuaţia 6.13) numai cu un factor de ordinul unităţii. Dacă frecvenţa de ciocnire a electronilor este dependentă de viteză, expresiile fluxului de căldură devin mult mai complicate. Termenul similar ecuaţiei 6.22 conţine un termen proporţional cu viteza medie a electronilor. Ca rezultat $\mathbf{q}_e$ ia forma

$$q_e = -\frac{5}{2} g_{qe} \frac{nT_e}{m_e \nu_{ea}} gradT_e + g_{Te} nT_e \mathbf{u}_e . \quad 6.24$$

Valorile numerice ale coeficienților g_q și g_T sunt obținute din dependenta lui ν_{ea} pe ν. Fluxul de căldură al ionilor este adesea asociat cu cel al atomilor neutri, datorită schimbului efectiv de energie din timpul ciocnirii. Din acest motiv ecuațiile fluxurilor de căldură ale ionilor şi atomilor trebuie considerate simultan. Înlocuind termenii de ciocnire [vezi 3,4] în ecuația 6.21 pentru ioni şi atomii neutri şi neglijând ciocnirile ion-ion şi ținând cont că $\nu_{ai} = (n_i / n_a)\nu_{ia}$ si $m_i = m_a$ obținem:

$$\frac{5}{2}\frac{n_i T_i}{m_i} gradT_i = \nu_{ia}\left[-\frac{3}{4}\mathbf{q}_i + \frac{1}{4}\frac{n_i}{n_a}\mathbf{q}_a + \frac{5}{8} n_i (T_i - T_a)(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_a)\right]$$

$$\frac{5}{2}\frac{n_a T_a}{m_a} gradT_a =$$

$$= \frac{n_i}{n_a}\nu_{ia}\left[-\frac{3}{4}\mathbf{q}_a + \frac{1}{4}\frac{n_a}{n_i}\mathbf{q}_i + \frac{5}{8} n_a (T_i - T_a)(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_a)\right] - \frac{1}{4}\nu_{aa}\mathbf{q}_a$$

Rezolvând aceste ecuații pentru $\mathbf{q}_i$ şi $\mathbf{q}_a$, şi ținând cont că avem o plasmă slab ionizată ($n_i << n_a$) găsim:

$$q_i = -\frac{10}{3}\frac{n_i T_i}{m_i \nu_{ia}} gradT_i + \frac{5}{6} n_i (T_i - T_a)(u_i - u_a)$$

$$-\frac{10}{3}\frac{n_i T_a}{m_a \nu_{\alpha a}} gradT_a$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\mathbf{q}_a = -10\frac{n_a T_a}{m_a \nu_{\alpha a}} gradT_a - \frac{10}{3}\frac{n_i T_i}{m_i \nu_{ia}} gradT_i$$
$$-\frac{10}{3} n_i \frac{\nu_{ia}}{\nu_{\alpha a}}(T_i - T_a)(\mathrm{u}_i - \mathrm{u}_a) \quad . \quad 6.25$$

În expresia fluxului de căldură al atomilor şi ionilor poate fi neglijată cantitatea $n_i T_i^2 << n_a T_a^2$. Acest flux este controlat numai de ciocnirile atom-atom. În expresia fluxului de ioni la $T_a << T_i$ ultimul termen poate fi neglijat şi atunci forma lui este similară ecuaţiei 6.24:

$$\mathbf{q}_i = -\frac{10}{3}\frac{n_i T_i}{m_i \nu_{ia}} gradT_i + \frac{5}{6} n_i T_i \mathbf{u}_i \,. \quad 6.26$$

Structura acestei expresii rămâne neschimbată când frecvenţa de ciocnire este dependentă de viteză însă coeficienţii numerici se schimbă.

6.2. Difuzia ambipolară.

După cum am văzut în paragraful anterior coeficienţii de mobilitate şi de difuzie sunt invers proporţionali cu masele particulelor încărcate; sunt mult mai mari pentru electroni decât pentru ioni. Dar din punct de vedere al păstrării cvasineutralităţii plasmei mişcarea independentă a electronilor şi ionilor este imposibilă. Deplasarea rapidă a electronilor dintr-un volum mic de plasmă va duce la apariţia unui câmp electric care va creşte şi va antrena ionii. Să vedem pentru început cum difuzează particulele încărcate într-un tub cilindric lung, presupunând că principalul mecanism este recombinarea la perete a ionilor cu electronii.

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Distribuția radială a concentrației particulelor încărcate în volum este prezentată în figura 6.2.

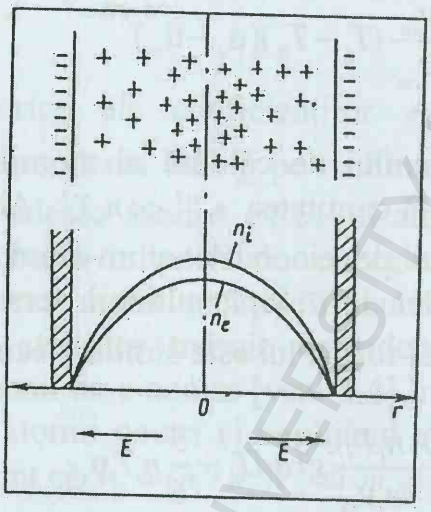

Figura 6.2.
Distribuția radială a concentrației particulelor încărcate [5].

Presupunem că la momentul inițial condiția de cvasineutralitate este riguros îndeplinită în întreg volumul plasmei. În următorul moment fluxul de difuzie al electronilor întrece pe cel al ionilor $D_e >> D_i$. Astfel pereții devin încărcați cu sarcină negativă şi o sarcină pozitivă în exces se acumulează în volum. Separarea sarcinilor duce la crearea unui câmp electric radial care accelerează ionii înspre pereți şi frânează electronii. Câmpul electric trebuie să crească până când fluxurile ionilor şi electronilor devin egale. Atunci apare regimul de difuzie ambipolară. Pentru ca mişcarea ambipolară să se mențină, potențialul negativ al pereților plasmei trebuie să devină destul de mare ca să descrească fluxul de electroni. Energia potențială

trebuie să întreacă energia termică a electronilor: $e(\varphi_g - \varphi_0) > T_e$. Sarcina spațială care creează această diferență de potențial este asigurată de diferența dintre concentrațiile ionilor și electronilor $\Delta n = n_i - n_e$. În plasmă valoarea $\Delta n / n$ este mică în întregul volum cu excepția pereților. Prezența pereților este necesară pentru difuzia ambipolară. Separarea spațială necesară pentru regimul ambipolar este rezultatul neomogenității plasmei. Pentru început ne propunem să descriem cantitativ difuzia ambipolară într-o plasmă care conține electroni și atomi simplu ionizați.

Condiția de cvasineutralitate pentru o plasmă care are concentrații de electroni și ioni egale în întreg volumul, cu excepția stratului de sarcină spațială din jurul pereților, a cărui grosime este de ordinul lungimii Debye, este

$$\left|n_e - n_i\right| << n_e,\ n_e \approx n_i \approx n\,. \qquad 6.60$$

Pentru a menține cvasineutralitatea variațiile concentrațiilor de electroni și de ioni din fiecare element de volum trebuie să fie egale, adică $\partial n_e / \partial t = \partial n_i / \partial t$ sau în conformitate cu ecuația 5.36,

$$-div(n_e \mathbf{u}_e) + \frac{\delta n_e}{\delta t} = -div(n_i \mathbf{u}_i) + \frac{\delta n_i}{\delta t}\,.$$

Procesele de volum care duc la apariția și dispariția particulelor (ionizare și recombinare) într-o plasmă cu trei componente nu conduc la o perturbare a cvasineutralității, un electron și un ion apare sau dispare în fiecare din aceste procese simultan. Având în vedere ca $\delta n_e / \delta t = \delta n_i / \delta t$ și ținând seama de condiția pentru

BCU IASI/CENTRALA UNIVERSITARA

menținerea cvasineutralității trebuie să egalăm fluxurile următoare:

$$div(n_e \mathbf{u}_e) = div(n_i \mathbf{u}_i). \qquad 6.61$$

Aceasta ecuație este echivalentă cu expresia $n\mathbf{u}_i = n\mathbf{u}_e + \Gamma_j$, unde $div\Gamma_j = 0$, adică fluxul Γ_j nu afectează concentrația. Din această expresie se poate determina curentul în plasmă $\mathbf{j} = ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = e\Gamma_j$. În cazul unidimensional (când fluxul depinde de o singură coordonată) este evident că curentul este foarte apropiat ca valoare de cel care curge între electrozi. În absența unui câmp electric extern când nu există curent în plasmă și $\Gamma_j = 0$, condiția 6.61 conduce la egalitatea dintre vitezele directe ale ionilor și electronilor, adică

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_e. \qquad 6.62$$

Mișcarea direcționată definită de ecuația 6.62 este de fapt difuzia ambipolară. În prezenta unui câmp electric extern vitezele direcționate ale electronilor și ionilor pot fi reprezentate ca o sumă a vitezei ambipolare și a vitezei curentului produs de către sursele externe E_0 prin coeficienții de mobilitate:

$$\begin{aligned} u_e &= u_A - b_e E_0 \\ u_i &= u_A + b_i E_0. \end{aligned} \qquad 6.63$$

Condiția 6.61 conduce la egalitatea:

$$div[n(b_e + b_i)E_0] = 0$$

care produce distribuția câmpului electric E_0 în plasmă. Ne propunem să găsim acum caracteristicile mișcării

ambipolare. Pentru aceasta considerăm ecuațiile 6.13 și 6.14 pentru vitezele directe. Când $|gradT/T| << |gradn/n|$ și difuzia termică se neglijează, vitezele directe ale electronilor și ionilor devin:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &= -D_e \frac{gradn}{n} - b_e \mathrm{E} \\ \mathbf{u}_i &= -D_i \frac{gradn}{n} + b_i \mathrm{E} \end{aligned} \quad . \qquad 6.64$$

Dacă egalăm aceste două viteze potrivit ecuației 6.62 este ușor de găsit câmpul electric ambipolar, care duce la egalarea celor două fluxuri de electroni și ioni din plasmă

$$\mathrm{E}_A = \frac{D_i - D_e}{b_e + b_i} \frac{gradn}{n} \quad . \qquad 6.65$$

Dacă $D_e >> D_i$ și $b_e >> b_i$ găsim o expresie aproximativă pentru E_A:

$$\mathrm{E}_A \approx -\frac{D_e}{b_e} \frac{gradn}{n} = -\frac{T_e}{e} \frac{gradn}{n} \quad , \qquad 6.66$$

câmpul electric care se opune direcției gradientului. Deoarece $\mathrm{E} = -grad\varphi$, obținem din ecuația 6.66 distribuția potențialului

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{T_e}{e} ln \frac{n}{n_0} \quad . \qquad 6.67$$

Ecuația determină diferența de potențial dintre regiunea centrală a plasmei și pereți. Este ușor de observat că la densitate mică la perete $n_g << n$ aceasta depășește T_e/e.

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Distribuția obținută $n = n_0 exp[e(\varphi - \varphi_0)/T_e]$ corespunde ecuației Boltzmann. Distribuția Boltzmann într-un câmp electric ambipolar apare deoarece câmpul electric ambipolar conduce la o reflexie aproape totală a fluxului de electroni de la pereți. Cunoscând intensitatea câmpului electric putem găsi viteza medie a particulelor. Înlocuind ecuația 6.65 în ecuația 6.64 obținem viteza medie a particulelor sub efectul gradientului de concentrație:

$$u_e = u_i = -D_A \frac{gradn}{n} \qquad 6.68$$

$$D_A = \frac{D_e b_i + D_i b_e}{b_e + b_i}. \qquad 6.69$$

Coeficientul D_A este numit coeficientul difuziei ambipolare. Deoarece $D_e >> D_i$, $b_e >> b_i$ obținem din ecuația 6.69 $D_a \approx D_i + b_i D_e / b_e$ şi mai departe din ecuațiile 6.10 si 6.12,

$$D_A \approx D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) = \frac{T_e + T_i}{\mu_{ia} \nu_{ia}}. \qquad 6.70$$

Coeficientul difuziei ambipolare este mult mai mic decât coeficientul difuziei electronilor liberi şi mult mai mare decât coeficientul difuziei ionilor $D_i < D_A << D_e$. De aceea un câmp electric ambipolar reduce viteza medie a electronilor. În derivarea ecuațiilor vitezei medii ambipolare am presupus absența gradienților de temperatură. Este uşor să includem difuzia datorată temperaturii într-un mod analog cu cel descris mai sus. Egalând expresiile fluxurilor pentru electroni şi ioni, adică ecuațiile 6.13 şi 6.14 putem determina fluxul

ambipolar ţinând seama de temperatură. Intensitatea câmpului electric va fi:

$$\mathrm{E}_A = -\frac{D_e - D_i}{b_e + b_i}\frac{gradn}{n} - \frac{D_e^T}{b_e + b_i}\frac{gradT_e}{T_e} + \frac{D_i^T}{b_e + b_i}\frac{gradT_i}{T_i} \qquad 6.71$$

sau $b_i << b_e$, $D_i << D_e$:

$$\mathrm{E}_A \approx -\frac{D_e}{b_e}\frac{gradn}{n} - \frac{D_e^T}{b_e}\frac{gradT_e}{T_e} \approx -\frac{T_e}{e}\left[\frac{gradn}{n} + (1 - g_{Te})\frac{gradT_e}{T_e}\right]$$

unde relaţiile 6.9, 6.10, şi 6.20 pentru b_e, D_e şi D_e^T sunt utilizate. Expresia vitezei directe ambipolare ia următoarea formă:

$$\mathbf{u}_A = -D_A\frac{gradn}{n} - D_A^{Te}\frac{gradT_e}{T_e} - D_A^{Ti}\frac{gradT_i}{T_i} \qquad 6.72$$

unde difuzia ambipolară şi coeficienţii de temperatură ai difuziei sunt egali cu:

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$D_A = \frac{b_i D_e + b_e D_i}{b_i + b_e} \approx D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)$$

$$D_A^{Te} = D_e^T \frac{b_i}{b_e + b_i} \approx D_i \frac{T_e}{T_i}(1 - g_{Te}) \quad . \qquad 6.73$$

$$D_A^{Ti} = D_i^T \frac{b_e}{b_e + b_i} \approx D_i (1 - g_{Te})$$

Potrivit relațiilor 6.11 şi 6.20, $D_i = T_i / \mu_{ia} \nu_{ia}$; $g_{Te} \approx (T_{\alpha a} / \nu_{\alpha a}) d\nu_{\alpha a} / dT_{\alpha a}$. Când frecvențele de ciocnire sunt independente de viteză atunci $g_{Te} = g_{Ti} = 0$. În acest caz expresiile pentru viteza ambipolară şi intensitatea câmpului ambipolar pot fi reprezentate prin:

$$\mathbf{u}_A = -\frac{grad(D_A n)}{n} = -\frac{grad[n(T_e + T_i)]}{n \mu_{ia} \nu_{ia}}$$

$$\mathbf{E}_A = -\frac{grad(nT_e)}{n} \quad . \qquad 6.74$$

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.3. Ecuația energiei particulelor încărcate într-o plasmă slab ionizată.

Pornim de la ecuația particulelor încărcate:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div(n\mathbf{u}) = \frac{\delta n}{\delta t} \qquad 6.75$$

unde variația concentrației este determinată de componenta ambipolară a vitezei fluidului. Cazul general este prezentat de ecuația 6.72. Când frecvențele de ciocnire ale electronilor și ionilor cu atomii sunt independente de viteză prin înlocuirea ecuației 6.44 în ecuația 6.75 obținem următoarea expresie:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla(D_A n) = \frac{\delta n}{\delta t} \qquad 6.76$$

unde $D_A = (T_e + T_i)/\mu_{ia}\nu_{ia}$. Această ecuație include concentrația și temperatura ca fiind necunoscute. Pentru a găsi soluțiile acestei ecuații trebuie să o rezolvăm simultan cu ecuația energiei. Gradienții de temperatură sunt de obicei mult mai mici decât gradienții concentrației particulelor încărcate. În acest caz viteza fluidului este definită de ecuația 6.68, și ecuația energiei particulelor 6.75 ia următoarea formă:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_A \nabla n = \frac{\delta n}{\delta t} . \qquad 6.77$$

Pentru a rezolva ecuația de mai sus trebuie să cunoaștem distribuția concentrației inițiale și condițiile

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de frontieră. Aceste condiții rezultă din dispariția particulelor încărcate cu pereții incintei în care se generează plasma, pereți care pot fi metalici sau dielectrici. În regiunea pereților se poate separa un strat în care condiția de cvasineutralitate nu este îndeplinită (figura 6.3).

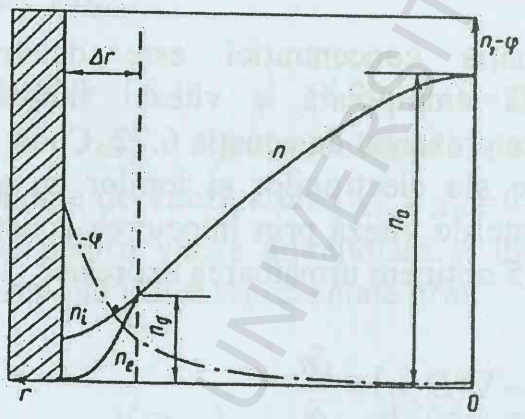

Figura 6.3. Regiunile pereților când are loc difuzia ambipolara [5].

Grosimea acestui strat (Δr) este de ordinul lungimii Debye; este de obicei mult mai mică decât drumul liber mediu. Peretele este încărcat negativ şi astfel câmpul electric este direcționat către perete. Fluxul particulelor încărcate către perete este determinat de concentrația la marginea acestui strat n_g, de viteza medie în direcția stratului $v_{\alpha g}$, şi de coeficientul de reflexie al particulelor de la strat η_α:

$$\Gamma_{\alpha g} = (1-\eta_\alpha) n_g v_{\alpha g} . \qquad 6.78$$

Viteza medie a ionilor în apropierea pereților pentru $T_e > T_i$ poate depăși viteza arbitrară datorită accelerării lor în câmpul electric (ecuația 6.66). La o distanta de câteva drumuri liber medii de la perete apare o diferență de potențial de ordinul T_e/e; lângă marginea stratului ionii sunt accelerați la o energie de ordinul T_e și viteza lor de $v_{ig} \sim (T_e/m_i)^{1/2}$. În câmpul electric al stratului ionii se mișcă accelerat către perete, și deoarece ciocnirile în strat sunt inexistente, practic toți ionii ajung la perete, și cea mai mare parte a ionilor care ajung la perete și sunt reflectați, se întorc în strat. Coeficientul de reflexie al ionilor este de ordinul $\eta_i \ll 1$. Cu toate acestea estimăm fluxul ionilor către perete la $T_e \geq T_i$:

$$\Gamma_{ig} \approx (1-\eta_i) n_g v_{ig} \approx n_g \sqrt{T_e/m_i} \,. \qquad 6.79$$

Când estimăm fluxul de electroni către perete trebuie să ne amintim că viteza lor medie întotdeauna întrece viteza fluidului. Viteza medie către perete este determinată de mișcarea de agitație termică $v_{eg} \approx \frac{1}{4}\langle w \rangle \approx \sqrt{T_e/m_i}$, iar fluxul de electroni către perete are valoarea $\Gamma_{eg} = (1-\eta_e) n_g \sqrt{T_e/m_e}$. În absenta curenților fluxul de electroni către perete trebuie să fie egal cu cel de ioni. Această egalitate este posibilă numai atunci când coeficientul de reflexie al electronilor η_e la perete este apropiat de unitate, $(1-\eta_e) \approx \sqrt{m_e/m_i}$. În acest caz este ușor de determinat diferența de potențial din stratul de sarcină spațială. Fluxul de electroni din stratul de sarcină spațială este egal cu:

$$\Gamma_{eg} = n_g \int_{(2e\Delta\varphi_l / m_e)^{1/2}}^{\infty} w_x f_{ex}(w_x) dw_x$$

unde x este axa în direcția stratului de sarcină spațială. Luând în considerare o distribuție Maxwelliană $f_{ex} = (m_e / 2\pi T_e)^{3/2} exp(-m_e w_x^2 / 2T_e)$ se obține valoarea fluxului de ioni:

$$\Gamma_{eg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n_g \sqrt{\frac{T_E}{m_e}} exp\left(-\frac{e\Delta\varphi_l}{T_e}\right). \qquad 6.80$$

Egalând fluxul de electroni cu fluxul de ioni (ecuația 6.79) găsim diferența de potențial care asigură difuzia ambipolară (de dispariție a particulelor din plasmă):

$$\Delta\varphi_l \approx \frac{T_e}{e} ln\sqrt{m_i / m_e} \approx (4-7)\frac{T_e}{e}. \qquad 6.81$$

Pentru a estima concentrația particulelor încărcate din stratul de sarcină spațială (regiunea condiției de cvasi-neutralitate) este necesar să egalăm fluxul particulelor încărcate la marginea stratului de sarcină spațială. Pentru a determina fluxul particulelor din plasmă acesta poate fi determinat din rata de difuzie ambipolară:

$$\Gamma_{eg} = D_A |gradn| \approx \frac{T_e}{m_i \nu_{ia}} \frac{n_0}{L}$$

unde n_0 este concentrația particulelor încărcate din centrul regiunii plasmei şi L este dimensiunea caracteristică a plasmei. Egalând acest flux cu cel al

BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

ionilor (ecuația 6.79) obținem raportul dintre concentrațiile particulelor încărcate la marginea și centrul plasmei

$$\frac{n_g}{n_0} \approx \frac{1}{L\nu_{ia}}\sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \approx \frac{\lambda_{ia}}{L}\sqrt{\frac{T_e}{T_i}}. \qquad 6.82$$

În regiunea unde aceste condiții sunt aplicate, ecuațiile de transport pot fi aplicate dacă variațiile parametrilor plasmei sunt mici pe drumul liber mediu, deci este posibil să scriem $\lambda_{ia} << L, n_g << n_0$ și sunt aproximate presupunând concentrația la margine egală cu zero, $n_g = 0$. Condițiile de frontieră de zero sunt folosite pentru a rezolva problemele de difuzie. Acum ne propunem să trecem peste ecuația obținută în paragraful 5.3 adică momentul al doilea al ecuației Boltzmann. Pentru o plasmă slab ionizată în care numai ciocnirile particulelor încărcate cu neutrii sunt importante, ecuațiile pentru energiile ionilor și electronilor se scriu:

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha grad T_\alpha + \frac{3}{2}T_\alpha div\mathbf{u}_\alpha + \frac{2}{3}div\mathbf{q}_\alpha$$
$$= -\kappa_{\alpha a}\nu_{\alpha a}(T_\alpha - T_a) + \frac{2}{3}\nu_{\alpha a}\frac{m_\alpha m_a^2}{(m_\alpha + m_a)^2}u_\alpha^2. \qquad 6.83$$

Expresiile obținute mai sus pentru viteza fluidului $\mathbf{u}$ și fluxul de căldură $\mathbf{q}$ trebuie să fie introduse în aceste ecuații. Ca rezultat vom obține ecuații diferențiale parțiale și neliniare. Simultan soluțiile ecuațiilor pentru electroni și ioni și ecuația concentrației fac posibilă în principiu găsirea funcției de distribuție a concentrației și

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

temperaturilor ionilor şi electronilor într-o plasmă. În general aceasta este o problemă foarte complicată.
Considerăm acum ecuaţia energiei electronilor, presupunând că frecvenţa ciocnirilor electronilor şi ionilor cu atomii este independentă de viteză. După cum am arătat în paragraful 5.3 viteza electronilor poate fi reprezentată ca o sumă a vitezei ambipolare (ecuaţia 6.74) şi viteza datorată câmpului electric extern (ecuaţia 7.63):

$$\mathbf{u}_e = -\frac{1}{n} grad(D_A n) - b_e E_0$$

unde $D_A = (T_e + T_i)/\mu_{ia}\nu_{ia}$, $b_e = e/m\nu_{ea}$ şi distribuţia câmpului E_0 trebuie să îndeplinească condiţiile: $div(n\mathbf{u}_E) = b_e$, $div(n\mathbf{E}_0) = 0$. Fluxul căldurii dat de electroni este determinat de egalitatea 6.22:

$$\mathbf{q}_e = -K_e grad T_e = -\chi_e n grad T_e$$

unde $\chi_e = \frac{5}{2} T_e / m_e \nu_{ea} = \frac{5}{2} D_e$. Când înlocuim aceste expresii în ecuaţia 6.83 trebuie să ţinem cont că $D_A << D_e$ şi termenii ambipolari în expresia lui $\mathbf{u}_a$ sunt de obicei mult mai mici decât viteza curentului $D_A / L << b_e E_0$. Neglijând termenii foarte mici, obţinem:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} - \frac{5}{3n} div(D_e grad T_e) - \frac{2}{3} D_A div\left(\frac{gradn}{n}\right)$$
$$-\frac{2}{3} eD_e E_0 \frac{gradn}{n} - eD_e E_0 \frac{gradT_e}{T_e} = \qquad (6.84)$$
$$= -\kappa_{ea} \nu_{ea} (T_e - T_a) + \frac{2}{3} \frac{e^2 E_0^2}{m_e \nu_{ea}}$$

Aici coeficientul mediu de transfer în timpul ciocnirii κ_{ea} şi frecvenţa de ciocnire ν_{ea} satisfac ecuaţiile 5.44 şi 5.76; ele includ ciocnirile elastice şi neelastice ale electronilor cu atomii. Ecuaţia neliniară 6.84 este foarte complicată dar adesea poate fi simplificată deoarece câţiva dintre termenii săi din partea stângă sunt neglijabili. Astfel într-o plasmă generată într-un tub cilindric câmpul extern este direcţionat pe direcţia longitudinală astfel încât putem scrie: $E_0 \perp gradn, gradT_e$ şi ultimii doi termeni din partea stângă ai ecuaţiei 6.84 dispar. Dacă $gradT/T$ şi $gradn/n$ sunt comparabili putem neglija cel de-al treilea termen în comparaţie cu cel de-al doilea deoarece $D_A << D_e$. În final pentru o rază a tubului de descărcare suficient de mare în comparaţie cu dimensiunile caracteristice ale drumului mediu de ciocnire putem neglija toţi termenii din partea stângă ai transferului de energie. Comparând aceşti termeni cu primul termen din partea dreaptă, care descrie transferul energiei în timpul ciocnirii, obţinem condiţiile pentru asemenea neglijări:

$$L_T^2,\ L_T L_n >> \frac{\lambda_{ea}^2}{\kappa_{ea}},\ L_n^2 >> \left(\frac{m_e T_E}{m_i T_i}\right)^{1/2} \frac{\lambda_{ea}\lambda_{ia}}{\kappa_{ea}} \qquad (6.85)$$

unde $L_T = (gradT_e / T_e)^{-1}$, $L_n = (gradn/n)^{-1}$ sunt dimensiunile caracteristice ale variaţiei concentraţiei şi

BCU IAŞI CENTRALĂ LIBRARY

temperaturii. Dacă aceste condiții își păstrează valabilitatea ecuația 6.84 ia o formă simplă:

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = -\kappa_{ea}\nu_{ea}(T_e - T_a) + \frac{2}{3}\frac{e^2 E_0^2}{m_e \nu_{ea}}, \qquad 6.86$$

care definește relația locală dintre temperatura electronilor și intensitatea câmpului electric produs de către o sursă externă. Pentru a rezolva ecuația energiei electronilor ținând seama de transferul de energiei, cu condițiile de frontieră pentru concentrație, determinăm condițiile de frontieră pentru temperatura electronilor, și astfel estimăm transferul energiei electronilor care părăsesc plasma. După cum am văzut mai sus (vezi figura 6.3) pereții au o barieră de potențial pentru electroni $e\Delta\varphi_l$ (ecuația 6.81) care reduce fluxul electronilor către perete și asigură dispariția lor prin difuzie ambipolară. Electronii care au energie mai mică decât $e\Delta\varphi_l$ sunt reflectați de la strat și se întorc în plasmă fără să producă variații în temperatură. Electronii care au energie mai mare decât $e\Delta\varphi_l$ trec prin stratul de sarcină și se deplasează către pereți. Energia rămasă este cheltuită pentru a menține diferența de potențial în stratul de sarcină spațială; este purtată la pereți de către ionii accelerați în stratul de sarcină spațială. În concluzie fluxul de electroni către perete este determinat de acei electroni cu energie mai mare decât $e\Delta\varphi_l$. Considerăm acum că distribuția electronilor pe viteză este Maxwelliană. Să presupunem că axa x este paralelă cu normală la suprafața stratului de sarcină spațială, și astfel găsim:

$$q_{eg} = n_g \int w_x \frac{m_e w^2}{2} f_{eg}(w) d^3 w =$$

$$= n_g \left(\frac{m}{2\pi T_{eg}} \right)^{3/2} \int_{(2e\Delta\varphi_l / m_e)^{1/2}}^{\infty} w_x dw_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dw_y dw_z \frac{m_e w^2}{2} \exp\left(-\frac{m_e w^2}{2T_{eg}} \right)$$

unde cantitățile n_g , T_{eg} și q_{eg} sunt obținute având condițiile la frontieră și integrând după vitezele w_x, la care bariera de potențial poate fi penetrată $\left(m_e w_x^2 / 2 > e\Delta\varphi_l\right)$ și peste toate vitezele w_y și w_z . Integrarea conduce la

$$q_{eg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n_g T_{eg}^{3/2}}{m_e^{1/2}} \left(2 + \frac{e\Delta\varphi_l}{T_{eg}} \right) exp\left(-\frac{e\Delta\varphi_l}{T_{eg}} \right). \qquad 6.87$$

Raportul fluxului de căldură la fluxul de particule la marginea stratului (ecuația 6.80) este egal cu energia medie purtată de plasmă printr-un singur electron:

$$\varepsilon_0 = \frac{q_{eg}}{\Gamma_{eg}} = T_{eg} \left(2 + \frac{e\Delta\varphi_l}{T_{eg}} \right) \approx T_{eg} \left(2 + ln\sqrt{m_i / m_e} \right). \qquad 6.88$$

Pentru a obține condițiile de frontieră fluxul de căldură către perete trebuie să fie egal cu fluxul de căldură din plasmă. Ținând cont de ecuațiile 6.22 si 6.68 obținem:

$$\frac{5}{2} n_g D_e |grad T_e| = T_{eg} \left(2 + ln\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right) \Gamma_{eg} \approx$$

$$\approx T_{eg} \left(2 + ln\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right) D_A |grad n|$$

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din această egalitate găsim raportul gradienților de temperatură şi concentrație la frontieră

$$\left(\frac{gradT_e}{T_e}\right)_g \approx \left(2+\ln\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\right)\frac{D_A}{D_e}\left(\frac{gradn}{n}\right)_g \approx \left(2+\ln\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\right)\frac{m_e\nu_{ea}}{m_i\nu_{ia}}\left(\frac{gradn}{n}\right)_g . \quad 6.89$$

Se poate vedea că la frontieră $(gradT_e/T_e)<<(gradn/n)$ putem aproxima condițiile de frontieră pentru T_e presupunând că $(gradT_e)_g=0$. Ecuația energiei ionilor poate fi obținută înlocuind ecuațiile 6.63 şi 6.74 pentru viteza fluidului şi ecuația 6.25 pentru fluxul de căldură în ecuația 6.83. Este uşor de observat că în aceste condiții $E_0 \perp gradn, gradT_e$, se obține inegalitatea:

$$L >> \sqrt{T_e/T_i}\,\lambda_{in} . \quad 6.90$$

Dacă această inegalitate se menține ecuația energiei ionilor ia următoarea formă:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nu_{ia}(T_i - T_a) + \frac{1}{6}\nu_{ia} m_i u_i^2 \quad 6.91$$

unde potrivit ecuației 6.63

$$\mathbf{u}_i = b_i\mathbf{E}_0 - \frac{grad(D_A n)}{n} = \frac{2}{m_i\nu_{ia}}\left[e\mathbf{E}_0 - \frac{1}{n}gradn(T_e+T_i)\right]$$

unde am ținut seama de ca $m_i = m_a$, $\mu_{ia} = \frac{1}{2}m_i$.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Bibliografie

[1] *Bazele Fizicii Plasmei, Ioan Iovit Popescu, Dumitru St. Ciobotaru, Editura Tehnica, Bucuresti, 1987.*
[2] *Curs de Cinetica si Dinamica Plasmei, M. Toma, Iasi, 1991.*
[3] *Fundamentals of Plasma Physics, V.E. Golant, A.P. Zhilinsky, I.E. Sakharov, John Wiley and Sons, 1979.*
[4] *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, F.F. Chen, Second Edition, Plenum Press, 1983.*
[5] *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing, M.A. Liberman, A.J. Lichtenberg, John Wiley ans Sons Inc. 1994.*
[6] *Principles of Plasma Processing, Francis F.Chen, Jane P. Chang, Plenum Kluwer Publisher, 2002.*
[7] *Plasma Physics and Plasma Engineering, Alexander Fridman, Lawrence A. Kennedy, Taylor and Francis, 2004.*

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

BCU IAS/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1331
9.7

ISBN 978-606-510-207-1

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY